追加練習問題

第１講　数と式

(1)　$3x^2-2z^2+2xy-4yz-5zx$ を因数分解すると，

$(x-$ ア $z)($ イ $x+$ ウ $y+z)$ となる．

(2)　$\sqrt{17}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると，$a=$ エ ，

$b=\sqrt{\text{オカ}}-$ キ であり，$b^2+\dfrac{1}{b^2}=$ クケ ，$2a^2b+3ab^2+b^3=\sqrt{\text{コサ}}$

である．

第２講　１次不等式・２次方程式

p，q を実数とする．x についての２次方程式 $x^2+px+q=0$ の２つの解を α，β とするとき，２数 $\alpha^2\beta$，$\alpha\beta^2$ を解とする２次方程式の１つが $x^2-10x+8=0$ であるという．

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=$ [アイ]，$\alpha^2\beta\cdot\alpha\beta^2=$ [ウ] であるから，$p=$ [エオ]，$q=$ [カ] である．

(2)　$|\alpha-\beta|=\sqrt{\text{[キク]}}$ である．

第３講　２次関数(1)

関数 $f(x)=x^2-6x+5$ において，次の問いに答えよ．

(1)　$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，さらに x 軸に関して対称移動すると，$y=$ ［ア］ x^2+ ［イウ］ $x-$ ［エオ］ のグラフに重なる．

(2)　a を定数とする．$a \leqq x \leqq a+2$ における $f(x)$ の最大値を求めると

$a \leqq$ ［カ］ のとき　a^2- ［キ］ $a+$ ［ク］

［カ］ $<a$ のとき　a^2- ［ケ］ $a-$ ［コ］

である．

第４講　２次関数(2)

［1］　2 次不等式 $x^2-x-3 \leqq |x-1|$ の解は，アイ $\leqq x \leqq$ ウ $+\sqrt{\text{エ}}$ である．

［2］　a を定数とし，$f(x)=x^2-ax+a+8$ とする．

(1)　不等式 $f(x)>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の値の範囲は

オカ $<a<$ キ である．

(2)　方程式 $f(x)=0$ が少なくとも 1 つの正の解をもつような a の値の範囲は

$a<$ クケ，コ $\leqq a$ である．

第５講　場合の数(1)

3 種類の文字 O，U，S をくり返しを許して 1 列に 6 個並べる．この並べ方の数を考える．

(1)　O が含まれないように並べる方法は［アイ］通りある．

(2)　O，U，S がすべて用いられるように並べる方法は［ウエオ］通りある．

(3)　O，U，S がいずれも 2 個ずつ含まれるように並べるとき，2 つの S が隣り合わないように並べる方法は［カキ］通りある．

第６講　場合の数(2)

赤，白，黒の玉がそれぞれ３個ずつあり，この９個の玉を１列に並べる．
同じ色の玉は区別しないものとして，並べ方の数を考える．

(1)　並べ方の総数は［アイウエ］通りである．

(2)　先頭の３個の玉が同じ色であるような玉の並べ方は［オカ］通りある．

(3)　先頭の３個の玉が同じ色であるか，末尾の３個の玉が同じ色であるか，少なくとも一方が成り立つ並べ方は［キクケ］通りある．

第７講　確率(1)

4 人でじゃんけんを 1 回だけおこなう.

(1)　4 人の手の出し方の総数は [アイ] 通りである.

(2)　勝者が 1 人である確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ である.

(3)　勝者が 2 人である確率は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である.

第８講　確率(2)

A，B ２人がそれぞれ１個ずつさいころを投げ，出た目の積が偶数ならば A の勝ち，奇数ならば B の勝ちとするゲームをくり返し行う．先に３ゲーム勝った方を優勝とする．

(1)　１ゲーム目で B が勝つ確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(2)　３ゲーム目で A の優勝が決まる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

(3)　４ゲーム目で優勝者が決まる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコサ}}}$ である．

第9講　三角比・平面図形

AB＝7，BC＝8，CA＝x である △ABC がある．ただし，$x>8$ とする．

(1)　x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イウ}}$ である．

(2)　△ABC が鈍角三角形であるとき，x の値の範囲は $\sqrt{\boxed{\text{エオカ}}} < x < \boxed{\text{キク}}$ である．

(3)　∠ABC＝120° であるとき，$x=\boxed{\text{ケコ}}$ であり，△ABC の内接円の半径は $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である．

第 11 講　式と証明・高次方程式(1)

2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の 2 つの解を α，β とする.

(1)　$\alpha^3=\beta^3=$ **ア** ，$\alpha+\beta=$ **イウ** ，$\alpha\beta=$ **エ** である.

(2)　$\alpha^5+\beta^5=$ **オカ** である.

(3)　$(\alpha^4-\alpha^2+1)(\beta^4-\beta^2+1)=$ **キ** である.

第12講　高次方程式(2)

［1］　3次方程式 $x^3+ax^2+bx+2=0$ が $x=-2$ を実数解にもち，他の2つの解が虚数解である．このとき，$b=$ **ア** $a-$ **イ** であり，a のとり得る値の範囲は **ウ** $<a<$ **エ** である．

［2］　4次方程式 $2x^4-7x^3+10x^2-7x+2=0$　……(＊)を解く．

(1)　$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと，(＊)は $2t^2-$ **オ** $t+$ **カ** $=0$ と表される．

(2)　(1)の結果を利用すると，(＊)の解は，$x=$ **キ** ，$\dfrac{\boxed{ク}\pm\sqrt{\boxed{ケ}}\,i}{\boxed{コ}}$ である．

第 13 講　図形と方程式(1)

(1)　点 A(4, 3) と直線 ℓ : $x+2y-5=0$ 上の点 P を結ぶ線分 AP の長さが最小になるとき，AP$=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ であり，このときの点 P の座標は ($\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$) である.

(2)　点 A(5, 3) と円 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 上の点 P を結ぶ線分 AP の長さの最大値は $\boxed{\text{エ}}$ ，最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である.

(3)　p を実数とする．直線 ℓ : $(p+1)x-py-3p+1=0$ は，p の値に関わらず点 $\left(-\boxed{\text{カ}},\ -\boxed{\text{キ}}\right)$ を通る．また，直線 ℓ が $1\leqq x\leqq 2$ の範囲で x 軸と交わるとき，p のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ク}}\leqq p\leqq\boxed{\text{ケ}}$ である.

第 14 講　図形と方程式(2)

［1］　点Ｐが円 $x^2+y^2=9$ の周上を動くとき，点Ａ(6，3)と点Ｐを結ぶ線分ＡＰを２：１に内分する点をＱとする．このとき，点Ｑの軌跡は，点(ア ， イ)を中心とする半径 ウ の円である．

［2］　実数 x，y が２つの不等式 $x^2+y^2 \leqq 25$，$3x+4y \geqq 0$ を満たすとする．

(1)　$4x+3y$ の最小値は エオ である．

(2)　$4x+3y$ の最大値は カキ である．

第 15 講　三角関数

［1］ $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，不等式 $\sin 2x < \sin x + \cos x - \dfrac{1}{2}$ を満たす x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}},\quad \frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}} < x < \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$$ である．

［2］ $F = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\theta$ とする．

(1) $F = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}\sin\theta + \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\cos\theta = \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{コ}}}\right)$ である．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$F < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi < \theta < \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi$ である．

第 16 講　指数関数・対数関数

[1]　実数 a，b が $3^a=2$，$8^b=9$ を満たすとき，$ab=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

[2]　関数 $y=2\left(\log_2\dfrac{x}{16}\right)(\log_2 4x)$　$\left(\dfrac{1}{8}\leqq x\leqq 8\right)$ における最大値と最小値を求める．

(1)　$\log_2 x=t$ とおいて y を t を用いて表すと,$y=\boxed{\text{ウ}}\,t^2-\boxed{\text{エ}}\,t-\boxed{\text{オカ}}$ である．

このとき，t の値の範囲は，$\boxed{\text{キク}}\leqq t\leqq\boxed{\text{ケ}}$ である．

(2)　最大値は $\boxed{\text{コサ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{シスセ}}$ である．

[3]　$x>0$，$y>0$，$2x+y=16$ のとき

(1)　x のとり得る値の範囲は $0<x<\boxed{\text{ソ}}$ である．

(2)　$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y$ の最小値は $\boxed{\text{タチ}}$ である．

第18講　積分法

放物線 $C：y=x^2+x-3$ と直線 $l：y=2x+3$ がある．

(1)　C と l の交点の x 座標は，値の小さい方から，［アイ］，［ウ］である．

(2)　t を［ウ］より大きい定数とし，C と l で囲まれた部分の面積を S，$x \geqq$［ウ］の範囲で C と l および直線 $x=t$ で囲まれた部分の面積を T とし，$x \leqq$［アイ］の範囲で C と l および直線 $x=-t$ で囲まれた部分の面積を U とする．

$S=T+U$ となるときの t の値は［エ］$\sqrt{［オ］}$ である．

第 19 講　微分法・積分法

$f(t)$ を t の 2 次関数とし，$g(x)=2x-5+\int_{1}^{x} f(t)\,dt$ とする．

$g(x)$ は $x=-1$ と $x=3$ で極値をとり，$x=2$ での曲線 $y=g(x)$ の接線の傾きが -9 である．

(1)　$g'(x)=$ [ア] x^2- [イ] $x-$ [ウ] である．

(2)　$g(x)=x^3-$ [エ] x^2- [オ] $x+$ [カ] である．

(3)　$g(x)$ の極大値は [キク]，極小値は [ケコサ] である．

第 20 講　数列(1)

［1］　公比が正の数である等比数列について，初めの 4 項の和が 45 であり，次の 4 項の和が 720 であるという．この数列の初めの 6 項の和は アイウ である．

［2］　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $n(n+1)(n+2)$ で表される．

(1)　$a_n=$ エ $n(n+$ オ $)$ である．

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{a_k}=\frac{\text{カキ}}{\text{クケ}}$ である．

第22講　平面ベクトル(1)

△OABにおいて，辺OAの中点をC，辺OBを1：2に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする．

(1)　AP：PD$=t:(1-t)$（ただし，$0<t<1$）としてtの値を求めると，

$t=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であるから，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{OB}$ である．

(2)　直線OPと辺ABの交点をQとすると，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{OB}$ である．

第23講　平面ベクトル(2)

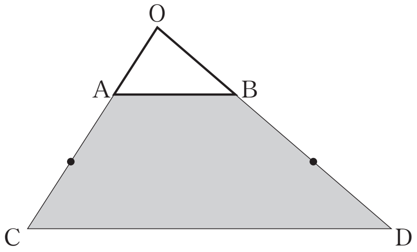
△OAB において，$\left|\overrightarrow{OA}\right|=4$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=5$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=12$ である．また，s，t を実数とし，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$1\leqq s+2t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ となる点 P をとる．

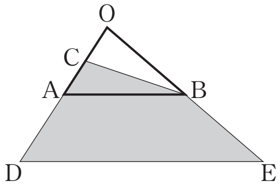
(1)　△OAB の面積は［ア］である．

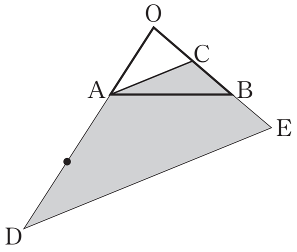
(2)　点 P の存在範囲は，［イ］の周および内部である．

［イ］は，次の①～③から適するものを選べ．

①　四角形 ACDB　　②　四角形 CDEB　　③　四角形 ADEC



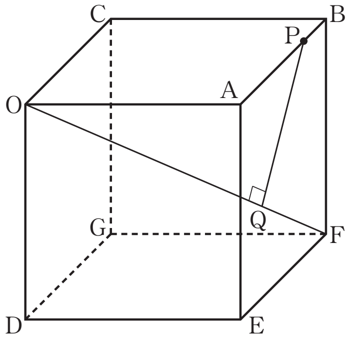




(3)　点 P の存在範囲を表す領域の面積は［ウエ］である．

第 24 講　空間ベクトル

1 辺の長さが 1 である立方体 OABC-DEFG において，
辺 AB 上に点 P，対角線 OF 上に点 Q をとる．
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とし，t，s を実数として
$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OF}$ とおくとき



(1)　$\overrightarrow{PQ}=($ ア $)\vec{a}+($ イ $)\vec{c}+($ ウ $)\vec{d}$ である．

ア ～ ウ は，次の①～⑥から適するものを選べ．

①　t　　②　s　　③　$t-1$
④　$s-1$　　⑤　$t-s$　　⑥　$s-t$

(2)　PQ⊥OF となるように P，Q をとるとき，$t=$ エ $s-$ オ である．

(3)　(2)のとき，$PQ^2=$ カ s^2- キ $s+$ ク と表されるので，線分 PQ の長さの最小値は $\dfrac{\sqrt{\text{ケ}}}{\text{コ}}$ である．

追加練習問題解答

第1講　数と式

(1)　$3x^2-2z^2+2xy-4yz-5zx$ を因数分解すると，

$(x-$ [ア] $z)($ [イ] $x+$ [ウ] $y+z)$ となる．

(2)　$\sqrt{17}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると，$a=$ [エ]，

$b=\sqrt{\text{[オカ]}}-$ [キ] であり，$b^2+\dfrac{1}{b^2}=$ [クケ]，$2a^2b+3ab^2+b^3=\sqrt{\text{[コサ]}}$

である．

解答例

(1)　$3x^2-2z^2+2xy-4yz-5zx=2(x-2z)y+3x^2-5xz-2z^2$

$$=2(x-2z)y+(x-2z)(3x+z)$$

$$=(x-2z)(2y+3x+z)$$

$$=(x-\mathbf{2}z)(\mathbf{3}x+\mathbf{2}y+z)$$

(2)　$4<\sqrt{17}<5$ より　$a=\mathbf{4}$，$b=\sqrt{\mathbf{17}}-\mathbf{4}$

このとき

$$b+\frac{1}{b}=\sqrt{17}-4+\frac{1}{\sqrt{17}-4}$$

$$=\sqrt{17}-4+\sqrt{17}+4$$

$$=2\sqrt{17}$$

$$b^2+\frac{1}{b^2}=\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-2$$

$$=\left(2\sqrt{17}\right)^2-2$$

$$=\mathbf{66}$$

$$2a^2b+3ab^2+b^3=b(2a^2+3ab+b^2)$$

$$=b(a+b)(2a+b)$$

$$=\left(\sqrt{17}-4\right)\cdot\sqrt{17}\left(\sqrt{17}+4\right)$$

$$=\sqrt{17}(17-16)$$

$$=\sqrt{\mathbf{17}}$$

第２講　１次不等式・２次方程式

p，q を実数とする．x についての２次方程式 $x^2+px+q=0$ の２つの解を α，β とするとき，２数 $\alpha^2\beta$，$\alpha\beta^2$ を解とする２次方程式の１つが $x^2-10x+8=0$ であるという．

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=$ アイ，$\alpha^2\beta\cdot\alpha\beta^2=$ ウ であるから，$p=$ エオ，$q=$ カ である．

(2)　$|\alpha-\beta|=\sqrt{\text{キク}}$ である．

解答例

(1)　$x^2+px+q=0$ の２解が α，β より，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=q$$

$x^2-10x+8=0$ の２解が $\alpha^2\beta$，$\alpha\beta^2$ であるから，同様に

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\mathbf{10}$$

$$\alpha^2\beta\cdot\alpha\beta^2=\mathbf{8}$$

ここで　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-pq$

$\alpha^2\beta\cdot\alpha\beta^2=(\alpha\beta)^3=q^3$

であるから

$$-pq=10,\quad q^3=8$$

q は実数であるから　$q=2$

$-2p=10$ より　$p=-5$

以上より　$p=\mathbf{-5}$，$q=\mathbf{2}$

(2)　(1)より　$\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=2$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=5^2-4\cdot2=17$$

よって　$\alpha-\beta=\pm\sqrt{17}$

したがって　$|\alpha-\beta|=\sqrt{\mathbf{17}}$

第３講　２次関数(1)

関数 $f(x)=x^2-6x+5$ において，次の問いに答えよ．

(1)　$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，さらに x 軸に関して対称移動すると，$y=$ [ア] x^2+ [イウ] $x-$ [エオ] のグラフに重なる．

(2)　a を定数とする．$a \leqq x \leqq a+2$ における $f(x)$ の最大値を求めると

$a \leqq$ [カ] のとき　a^2- [キ] $a+$ [ク]

[カ] $<a$ のとき　a^2- [ケ] $a-$ [コ]

である．

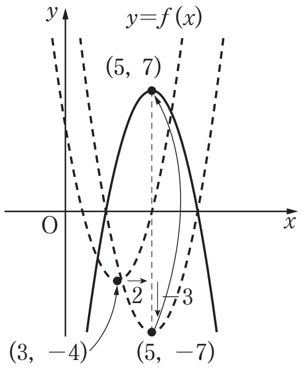
解答例

(1)　$f(x)=(x-3)^2-4$

$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は　(3，-4)

$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると，頂点は (5，-7) へ移動する．

さらに，x 軸に関して対称移動すると，頂点は (5，7) へ移動し，グラフは上に凸になる．



よって，求めるグラフの式は　$y=-(x-5)^2+7$

すなわち　$y=\mathbf{-x^2+10x-18}$

(別解)　$y=x^2-6x+5$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動したグラフの方程式は

$y+3=(x-2)^2-6(x-2)+5$　　つまり　$y=x^2-10x+18$

このグラフを x 軸に関して対称移動したグラフの方程式は

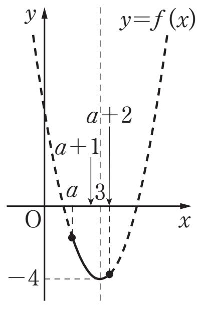
$y=-(x^2-10x+18)$　　したがって　$y=-x^2+10x-18$

(2)　定義域 $a \leqq x \leqq a+2$ の中央 $a+1$ の値によって場合分けをする．

(i)　$a+1 \leqq 3$，すなわち $a \leqq \mathbf{2}$ のとき

$x=a$ で最大となり，最大値は

$f(a)=a^2-\mathbf{6}a+\mathbf{5}$

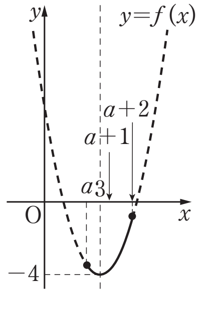


(ii)　$3<a+1$，すなわち $2<a$ のとき

$x=a+2$ で最大となり，最大値は

$f(a+2)=(a-1)^2-4$

$=a^2-\mathbf{2}a-\mathbf{3}$



第４講　２次関数(2)

[1]　2次不等式 $x^2-x-3 \leqq |x-1|$ の解は，［アイ］$\leqq x \leqq$［ウ］$+\sqrt{［エ］}$ である．

[2]　a を定数とし，$f(x)=x^2-ax+a+8$ とする．

(1)　不等式 $f(x)>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の値の範囲は

［オカ］$<a<$［キ］である．

(2)　方程式 $f(x)=0$ が少なくとも1つの正の解をもつような a の値の範囲は

$a<$［クケ］，［コ］$\leqq a$ である．

解答例

[1] $x \geqq 1$ のとき　$x^2-x-3 \leqq x-1$　　$x^2-2x-2 \leqq 0$　　$1-\sqrt{3} \leqq x \leqq 1+\sqrt{3}$

$x \geqq 1$ より　$1 \leqq x \leqq 1+\sqrt{3}$　……①

$x<1$ のとき　$x^2-x-3 \leqq -(x-1)$　　$x^2-4 \leqq 0$　　$-2 \leqq x \leqq 2$

$x<1$ より　$-2 \leqq x<1$　……②

①，②より，不等式の解は　$\mathbf{-2 \leqq x \leqq 1+\sqrt{3}}$

[2] (1)　$f(x)>0$，すなわち $x^2-ax+a+8>0$ がすべての実数 x に対して成り立つのは，

2次方程式 $x^2-ax+a+8=0$ が実数解をもたないときである．

$x^2-ax+a+8=0$ の判別式を D とすると

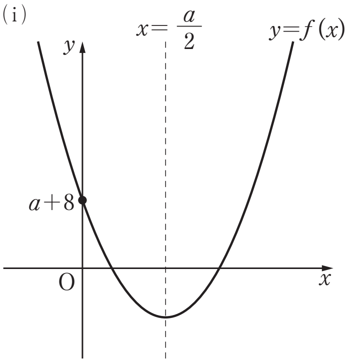
$D=(-a)^2-4(a+8)=a^2-4a-32<0$

$(a+4)(a-8)<0$

よって　$\mathbf{-4<a<8}$

(2)　$f(x)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a+8$　　軸：$x=\dfrac{a}{2}$

(i)



$f(x)=0$ が少なくとも1つの正の解をもつのは，

(i)，(ii)のいずれか．

(i)　$f(x)=0$ が2つの正の解をもつ(重解を含む)

(ii)　$f(x)=0$ が1つの正の解をもつ

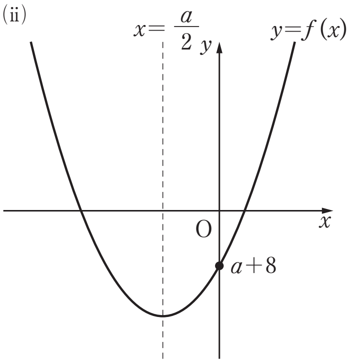
(i)のとき　$\dfrac{a}{2}>0$，つまり　$a>0$

$D=a^2-4a-32 \geqq 0$　つまり　$a \leqq -4$，$8 \leqq a$

$f(0)=a+8>0$　つまり　$a>-8$

これらをすべて満たす a の値の範囲は　$a \geqq 8$

(ii)



(ii)のとき　$f(0)=0$ となるのは，$a=-8$ のとき．

このとき，$f(x)=x^2+8x=0$　　$x=0$，-8

よって，正の解をもたず不適．

$f(0)<0$ のとき　$a<-8$

このとき，$f(x)=0$ は正の解と負の解を1つずつもつ．

以上より，求める a の値の範囲は　$\mathbf{a<-8}$，$\mathbf{8 \leqq a}$

第５講　場合の数(1)

3種類の文字O，U，Sをくり返しを許して1列に6個並べる．この並べ方の数を考える．

(1)　Oが含まれないように並べる方法は **アイ** 通りある．

(2)　O，U，Sがすべて用いられるように並べる方法は **ウエオ** 通りある．

(3)　O，U，Sがいずれも2個ずつ含まれるように並べるとき，2つのSが隣り合わないように並べる方法は **カキ** 通りある．

解答例

(1)　Oが含まれないように並べる方法は，UまたはSを6個並べる場合だから，並べ方の総数は

$2^6=\mathbf{64}$（通り）

(2)　6文字の並べ方の総数は　$3^6=729$（通り）

このうち，次の並べ方の数を求める．

(i)　1つの文字だけの文字列

(ii)　2つの文字だけの文字列

(i)は，3通り．

(ii)について

OとUだけの文字列の個数は　$2^6-2=62$（通り）

OとS，UとSだけの文字列についても同様だから，(ii)の並べ方の数は

$62\times3=186$（通り）

よって，O，U，Sがすべて用いられるような並べ方の総数は

$729-(3+186)=\mathbf{540}$（通り）

(3)　O，U，Sがいずれも2個ずつ含まれるように並べ，かつ，2つのSが隣り合わない並べ方は，まずO，O，U，Uを並べ，次にその間および両端の5か所中2か所を選び，そこにSを1個ずつ入れればよい．

よって　$\dfrac{4!}{2!2!}\times{}_5C_2=6\times10=\mathbf{60}$（通り）

第6講　場合の数(2)

赤，白，黒の玉がそれぞれ3個ずつあり，この9個の玉を1列に並べる．
同じ色の玉は区別しないものとして，並べ方の数を考える．

(1)　並べ方の総数は **アイウエ** 通りである．

(2)　先頭の3個の玉が同じ色であるような玉の並べ方は **オカ** 通りある．

(3)　先頭の3個の玉が同じ色であるか，末尾の3個の玉が同じ色であるか，少なくとも一方が成り立つ並べ方は **キクケ** 通りある．

解答例

(1)　赤，白，黒3個ずつ，計9個を並べる方法は

$$\frac{9!}{3!3!3!}=\mathbf{1680}\text{（通り）}$$

(2)　先頭の3個が赤であるときの並べ方は　$\frac{6!}{3!3!}=20$（通り）

同様に先頭の3個が白，黒であるときの並べ方も20通りずつある．

よって，並べ方の数は　$20\times3=\mathbf{60}$（通り）

(3)　末尾の3個が同じ色である並べ方は，(2)と同様に考えて　60通り．

また，先頭の3個が同じ色で，末尾の3個も同じ色であるものは　$3!=6$（通り）

よって，並べ方の数は

$$60+60-6=\mathbf{114}\text{（通り）}$$

第７講　確率(1)

4 人でじゃんけんを 1 回だけおこなう.

(1)　4 人の手の出し方の総数は [アイ] 通りである.

(2)　勝者が 1 人である確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ である.

(3)　勝者が 2 人である確率は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である.

解答例

(1)　4 人の手の出し方の総数は　$3^4=\mathbf{81}$（通り）

(2)　勝者が 1 人であるような手の出し方は,

4 人のうちの勝者 1 人を選ぶ方法が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りあり,

その各々に対して勝者の手の出し方が 3 通りあるから

${}_4\mathrm{C}_1\times3$ 通り.

よって, 勝者が 1 人である確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times3}{81}=\mathbf{\frac{4}{27}}$$

(3)　勝者が 2 人であるような手の出し方は,

4 人のうちの勝者 2 人を選ぶ方法が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあり,

その各々に対して勝者の手の出し方が 3 通りあるから

${}_4\mathrm{C}_2\times3$ 通り.

よって, 勝者が 2 人である確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times3}{81}=\frac{6\times3}{81}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

第8講　確率(2)

A，B 2人がそれぞれ1個ずつさいころを投げ，出た目の積が偶数ならばAの勝ち，奇数ならばBの勝ちとするゲームをくり返し行う．先に3ゲーム勝った方を優勝とする．

(1)　1ゲーム目でBが勝つ確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(2)　3ゲーム目でAの優勝が決まる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

(3)　4ゲーム目で優勝者が決まる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコサ}}}$ である．

解答例

(1)　1ゲーム目でBが勝つのは，A，Bの出た目がともに奇数のときであるから，求める確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(2)　1回のゲームで，Aが勝つ確率は　$1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

3ゲーム目でAの優勝が決まるのは，Aが3連勝する場合であるから，求める確率は

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\mathbf{\frac{27}{64}}$$

(3)　4ゲーム目で優勝者が決まるのは次のときである．

(i)　3ゲーム目まででAが2勝1敗で，4ゲーム目にAが勝つ

(ii)　3ゲーム目まででBが2勝1敗で，4ゲーム目にBが勝つ

(i)の起こる確率は　${}_3C_2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\cdot\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{81}{4^4}$

(ii)の起こる確率は　${}_3C_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\cdot\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4^4}$

よって，求める確率は　$\dfrac{81}{4^4}+\dfrac{9}{4^4}=\dfrac{90}{4^4}=\mathbf{\dfrac{45}{128}}$

第９講　三角比・平面図形

AB＝7，BC＝8，CA＝x である △ABC がある．ただし，$x>8$ とする．

(1)　x のとり得る値の範囲は **ア** ＜x＜ **イウ** である．

(2)　△ABC が鈍角三角形であるとき，x の値の範囲は $\sqrt{\boxed{エオカ}}<x<$ **キク** である．

(3)　∠ABC＝120° であるとき，x＝ **ケコ** であり，△ABC の内接円の半径は $\sqrt{\boxed{サ}}$ である．

解答例

(1)　3 辺のうち，CA が最大辺である．

よって，CA＜AB＋BC より　$x<7+8$　　$x<15$

$x>8$ だから　$\mathbf{8<x<15}$

(2)　最大辺 CA の対角 ∠B が最大角である．

よって，△ABC が鈍角三角形になるのは，$CA^2>AB^2+BC^2$ のとき．

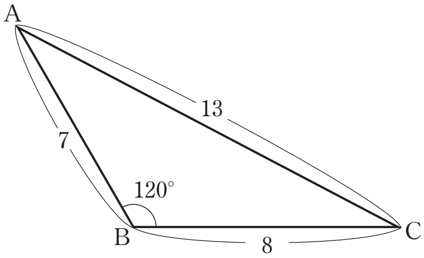
$x^2>7^2+8^2$　　$x^2>113$

(1)を考慮して　$\sqrt{\mathbf{113}}<x<\mathbf{15}$

(3)　∠ABC＝120° のとき，余弦定理より

$x^2=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cos120^\circ$

$x^2=169$　　$x=\mathbf{13}$



△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot7\cdot8\sin120^\circ=14\sqrt{3}$$

また，△ABC の内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{r}{2}(7+8+13)=14r$$

よって，$14r=14\sqrt{3}$　　$r=\sqrt{\mathbf{3}}$

第 11 講　式と証明・高次方程式(1)

2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の 2 つの解を α，β とする．

(1)　$\alpha^3=\beta^3=$ **ア** ，$\alpha+\beta=$ **イウ** ，$\alpha\beta=$ **エ** である．

(2)　$\alpha^5+\beta^5=$ **オカ** である．

(3)　$(\alpha^4-\alpha^2+1)(\beta^4-\beta^2+1)=$ **キ** である．

解答例

(1)　α は $x^2+x+1=0$ の解より　$\alpha^2+\alpha+1=0$

$$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0 \qquad \alpha^3-1=0$$

よって　$\alpha^3=1$

同様に，$\beta^3=1$ だから　$\alpha^3=\beta^3=\mathbf{1}$

また，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=\mathbf{-1}$，$\alpha\beta=\mathbf{1}$

(2)　$\alpha^5+\beta^5=\alpha^3\cdot\alpha^2+\beta^3\cdot\beta^2$

$$=\alpha^2+\beta^2$$
$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(-1)^2-2\cdot1$$
$$=\mathbf{-1}$$

(3)　$\alpha^4-\alpha^2+1=\alpha^3\cdot\alpha-\alpha^2+1$

$$=-\alpha^2+\alpha+1$$
$$=-(-\alpha-1)+\alpha+1$$
$$=2\alpha+2$$

同様に　$\beta^4-\beta^2+1=2\beta+2$

よって

$$(\alpha^4-\alpha^2+1)(\beta^4-\beta^2+1)=(2\alpha+2)(2\beta+2)$$
$$=4\alpha\beta+4(\alpha+\beta)+4$$
$$=4\cdot1+4\cdot(-1)+4$$
$$=\mathbf{4}$$

第12講　高次方程式(2)

［1］ 3次方程式 $x^3+ax^2+bx+2=0$ が $x=-2$ を実数解にもち，他の2つの解が虚数解である．このとき，$b=$ ［ア］ $a-$ ［イ］ であり，a のとり得る値の範囲は ［ウ］ $<a<$ ［エ］ である．

［2］ 4次方程式 $2x^4-7x^3+10x^2-7x+2=0$ ……(＊)を解く．

(1) $t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと，(＊)は $2t^2-$ ［オ］ $t+$ ［カ］ $=0$ と表される．

(2) (1)の結果を利用すると，(＊)の解は，$x=$ ［キ］，$\dfrac{［ク］\pm\sqrt{［ケ］}\,i}{［コ］}$ である．

解答例

［1］ $x^3+ax^2+bx+2=0$ ……①

①が $x=-2$ を解にもつとき　$-8+4a-2b+2=0$　　$b=\mathbf{2}a-\mathbf{3}$

このとき，①は　$(x+2)\{x^2+(a-2)x+1\}=0$

他の解は，2次方程式 $x^2+(a-2)x+1=0$ ……②の解である．

これが虚数解であるから，②の判別式を D とすると

$$D=(a-2)^2-4<0 \qquad a^2-4a<0$$

よって　$\mathbf{0}<a<\mathbf{4}$

［2］(1) $2x^4-7x^3+10x^2-7x+2=0$ ……(＊)

(＊)は $x=0$ を解にもたない．よって，両辺を x^2 で割って

$$2x^2-7x+10-7\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0$$

$$2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$$

$t=x+\dfrac{1}{x}$ であるから　$2t^2-\mathbf{7}t+\mathbf{6}=0$

(2) $2t^2-7t+6=0$ より　$(t-2)(2t-3)=0$　$t=2,\ \dfrac{3}{2}$

$t=2$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=2$　　$x^2-2x+1=0$　　よって　$x=1$

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$　　$2x^2-3x+2=0$　　よって　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}\,i}{4}$

以上より，(＊)の解は　$x=\mathbf{1},\ \dfrac{\mathbf{3}\pm\sqrt{\mathbf{7}}\,i}{\mathbf{4}}$

第13講　図形と方程式(1)

(1)　点 $A(4,\ 3)$ と直線 $\ell : x+2y-5=0$ 上の点 P を結ぶ線分 AP の長さが最小になるとき，$AP=\sqrt{\boxed{ア}}$ であり，このときの点 P の座標は $(\boxed{イ},\ \boxed{ウ})$ である．

(2)　点 $A(5,\ 3)$ と円 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 上の点 P を結ぶ線分 AP の長さの最大値は $\boxed{エ}$，最小値は $\boxed{オ}$ である．

(3)　p を実数とする．直線 $\ell : (p+1)x-py-3p+1=0$ は，p の値に関わらず点 $\left(-\boxed{カ},\ -\boxed{キ}\right)$ を通る．また，直線 ℓ が $1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で x 軸と交わるとき，p のとり得る値の範囲は $\boxed{ク} \leqq p \leqq \boxed{ケ}$ である．

解答例

(1)　線分 AP の長さが最小になるのは $AP \perp \ell$ のときである．

このとき，点と直線の距離の公式より

$$AP=\frac{|4+2\cdot 3-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$$

点 A を通り，直線 ℓ に垂直な直線は　$y=2(x-4)+3$　　つまり　$y=2x-5$

これと直線 ℓ の交点の座標は　$(\mathbf{3},\ \mathbf{1})$

(2)　$x^2+y^2-4x+2y+1=0$ より　$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

よって，円の中心 C は　$(2,\ -1)$

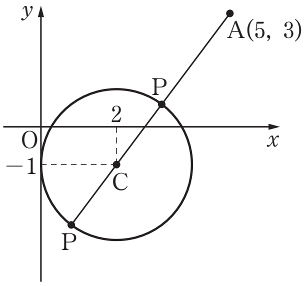
半径 r は　$r=2$

$AC=\sqrt{3^2+4^2}=5>r$ より，点 A は円の外部にある．

したがって，線分 AP の最大値，最小値は

最大値　$AC+r=5+2=\mathbf{7}$

最小値　$AC-r=5-2=\mathbf{3}$



(3)　ℓ の式を変形すると　$(x-y-3)p+(x+1)=0$

これがすべての実数 p について成立するのは

$x-y-3=0$ かつ $x+1=0$　　つまり　$x=-1,\ y=-4$ のとき．

したがって，直線 ℓ は p の値によらず定点 $(\mathbf{-1},\ \mathbf{-4})$ を通る．

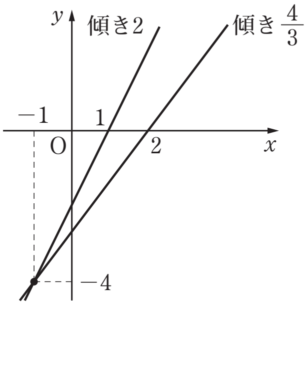
直線 ℓ が点 $(1,\ 0)$ を通るとき，傾きは 2

点 $(2,\ 0)$ を通るとき，傾きは $\frac{4}{3}$

よって，直線 ℓ が $1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で x 軸と交わるのは，

$\frac{4}{3} \leqq$（直線 ℓ の傾き）$\leqq 2$ のときである．

ここで，$p=0$ のとき，直線 ℓ は x 軸に垂直な直線となり不適．よって　$p \neq 0$



直線 ℓ の傾きは $\frac{p+1}{p}=1+\frac{1}{p}$ だから　$\frac{4}{3} \leqq 1+\frac{1}{p} \leqq 2$

$\frac{1}{3} \leqq \frac{1}{p} \leqq 1$ より，求める p の値の範囲は　$\mathbf{1} \leqq p \leqq \mathbf{3}$

第 14 講　図形と方程式(2)

［1］　点 P が円 $x^2+y^2=9$ の周上を動くとき，点 A(6, 3) と点 P を結ぶ線分 AP を 2：1 に内分する点を Q とする．このとき，点 Q の軌跡は，点（ ア ， イ ）を中心とする半径 ウ の円である．

［2］　実数 x，y が 2 つの不等式 $x^2+y^2\leqq 25$，$3x+4y\geqq 0$ を満たすとする．

(1)　$4x+3y$ の最小値は エオ である．

(2)　$4x+3y$ の最大値は カキ である．

解答例

［1］　P$(s,\ t)$ とおくと，線分 AP を 2：1 に内分する点 Q の座標は

$$\left(\frac{1\cdot 6+2\cdot s}{3},\ \frac{1\cdot 3+2\cdot t}{3}\right)=\left(\frac{6+2s}{3},\ \frac{3+2t}{3}\right)$$

よって，Q$(x,\ y)$ とおくと　$x=\dfrac{6+2s}{3}$，$y=\dfrac{3+2t}{3}$

これらより　$s=\dfrac{3x-6}{2}$，$t=\dfrac{3y-3}{2}$

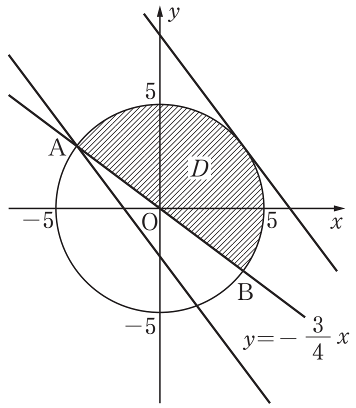
P$(s,\ t)$ は円 $x^2+y^2=9$ 上の点より　$\left(\dfrac{3x-6}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3y-3}{2}\right)^2=9$

$$\frac{9}{4}(x-2)^2+\frac{9}{4}(y-1)^2=9 \qquad (x-2)^2+(y-1)^2=4$$

よって，点 Q の軌跡は，中心 **(2, 1)**，半径 **2** の円．

［2］　$x^2+y^2\leqq 25$，$3x+4y\geqq 0$ で表される領域を D とすると，D は右図斜線部(境界含む)．

円 $x^2+y^2=25$ と直線 $3x+4y=0$ の交点を図のように A，B とすると　A$(-4,\ 3)$，B$(4,\ -3)$



(1)　$4x+3y=k$ とおき，

$\ell：y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{k}{3}$（傾き $-\dfrac{4}{3}$ の直線）が領域 D と共有点をもつときの y 切片 $\dfrac{k}{3}$ を考える．

k が最小になるのは，ℓ が点 A$(-4,\ 3)$ を通るときである．このとき　$k=4\cdot(-4)+3\cdot 3=-7$

よって，$4x+3y$ の最小値は　**−7**

(2)　k が最大になるのは，ℓ が円 $x^2+y^2=25$ と第 1 象限で接するときである．

このとき　$\dfrac{|-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5$　　$|k|=25$

$k>0$ より　$k=25$

よって，$4x+3y$ の最大値は　**25**

第 15 講　三角関数

［1］ $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，不等式 $\sin 2x < \sin x + \cos x - \dfrac{1}{2}$ を満たす x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{\boxed{ア}},\quad \frac{\pi}{\boxed{イ}} < x < \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\pi \text{ である.}$$

［2］ $F = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\theta$ とする．

(1) $F = \dfrac{\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}\sin\theta + \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\cos\theta = \sqrt{\boxed{ケ}}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{コ}}\right)$ である．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$F < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値の範囲は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi < \theta < \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\pi$

である．

解答例

［1］ $\sin 2x < \sin x + \cos x - \dfrac{1}{2}$ より　$2\sin x\cos x - \sin x - \cos x + \dfrac{1}{2} < 0$

$4\sin x\cos x - 2\sin x - 2\cos x + 1 < 0$

$2\sin x(2\cos x - 1) - (2\cos x - 1) < 0$

$(2\sin x - 1)(2\cos x - 1) < 0$

よって 「$\sin x < \dfrac{1}{2}$ かつ $\cos x > \dfrac{1}{2}$」または「$\sin x > \dfrac{1}{2}$ かつ $\cos x < \dfrac{1}{2}$」

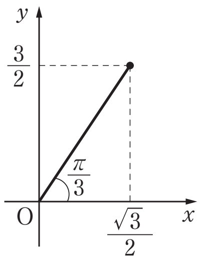
したがって　$0 < x < \dfrac{\pi}{\mathbf{6}}$，$\dfrac{\pi}{\mathbf{3}} < x < \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\pi$

［2］(1) $F = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\theta$

$= \sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6} + \cos\theta$

$= \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\sin\theta + \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\cos\theta$

$= \sqrt{\mathbf{3}}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{\mathbf{3}}\right)$



(2) $F < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　$\sqrt{3}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) < -\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$ だから，不等式の解は　$\dfrac{7}{6}\pi < \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{11}{6}\pi$

すなわち　$\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\pi < \theta < \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\pi$

第16講　指数関数・対数関数

[1]　実数 a，b が $3^a=2$，$8^b=9$ を満たすとき，$ab=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である.

[2]　関数 $y=2\left(\log_2\dfrac{x}{16}\right)(\log_2 4x)$　$\left(\dfrac{1}{8}\leqq x\leqq 8\right)$ における最大値と最小値を求める.

（1）$\log_2 x=t$ とおいて y を t を用いて表すと,$y=\boxed{ウ}t^2-\boxed{エ}t-\boxed{オカ}$ である.

このとき，t の値の範囲は，$\boxed{キク}\leqq t\leqq\boxed{ケ}$ である.

（2）最大値は $\boxed{コサ}$ であり，最小値は $\boxed{シスセ}$ である.

[3]　$x>0$，$y>0$，$2x+y=16$ のとき

（1）x のとり得る値の範囲は $0<x<\boxed{ソ}$ である.

（2）$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y$ の最小値は $\boxed{タチ}$ である.

解答例

[1]　$3^a=2$ より　$a=\log_3 2$　　$8^b=9$ より　$b=\log_8 9$

$$ab=\log_3 2\cdot\log_8 9=\log_3 2\cdot\frac{\log_3 9}{\log_3 8}=\log_3 2\cdot\frac{2}{3\log_3 2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

[2]（1）

$$\begin{aligned}y&=2\left(\log_2\frac{x}{16}\right)(\log_2 4x)\\&=2(\log_2 x-\log_2 16)(\log_2 4+\log_2 x)\\&=2(\log_2 x-4)(\log_2 x+2)\\&=2(t-4)(t+2)\\&=\boldsymbol{2}t^2-\boldsymbol{4}t-\boldsymbol{16}\end{aligned}$$

また，$\dfrac{1}{8}\leqq x\leqq 8$ より，$2^{-3}\leqq x\leqq 2^3$ だから　$\boldsymbol{-3}\leqq t\leqq\boldsymbol{3}$

（2）$y=2(t-1)^2-18$

$t=-3$ のとき　最大値 $2\cdot16-18=\boldsymbol{14}$

$t=1$ のとき　最小値　$\boldsymbol{-18}$

[3]（1）$2x+y=16$ より　$y=16-2x$　　$y>0$ より　$16-2x>0$　　$x<8$

これと $x>0$ より　$0<x<\boldsymbol{8}$

（2）

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y&=\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(16-2x)\\&=\log_{\frac{1}{2}}x(16-2x)=\log_{\frac{1}{2}}(-2x^2+16x)\\&=\log_{\frac{1}{2}}\{-2(x-4)^2+32\}\end{aligned}$$

底 $\dfrac{1}{2}$ は $0<\dfrac{1}{2}<1$ だから，真数が最大のときにこの式は最小になる.

よって，$x=4$，$y=8$ のとき，最小値 $\log_{\frac{1}{2}}32=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}=\boldsymbol{-5}$ をとる.

第18講　積分法

放物線 $C : y=x^2+x-3$ と直線 $l : y=2x+3$ がある．

(1)　C と l の交点の x 座標は，値の小さい方から，［アイ］，［ウ］である．

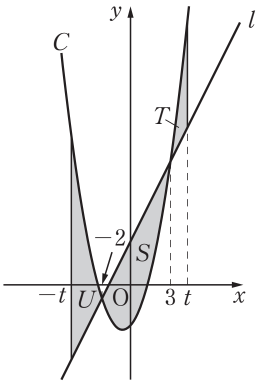
(2)　t を［ウ］より大きい定数とし，C と l で囲まれた部分の面積を S，$x \geqq$［ウ］の範囲で C と l および直線 $x=t$ で囲まれた部分の面積を T とし，$x \leqq$［アイ］の範囲で C と l および直線 $x=-t$ で囲まれた部分の面積を U とする．

　$S=T+U$ となるときの t の値は［エ］$\sqrt{［オ］}$ である．

解答例

(1)　C と l の式より y を消去して

$$x^2+x-3=2x+3$$
$$x^2-x-6=0$$
$$(x+2)(x-3)=0$$
$$x=\mathbf{-2},\ \mathbf{3}$$



(2)　$t>3$ であり，グラフは右図．

ここで

$$S=\int_{-2}^{3}\{(2x+3)-(x^2+x-3)\}\,dx$$
$$=-\int_{-2}^{3}(x^2-x-6)\,dx$$
$$T+U=\int_{-t}^{-2}\{(x^2+x-3)-(2x+3)\}\,dx+\int_{3}^{t}\{(x^2+x-3)-(2x+3)\}\,dx$$
$$=\int_{-t}^{-2}(x^2-x-6)\,dx+\int_{3}^{t}(x^2-x-6)\,dx$$

$S=T+U$ より

$$-\int_{-2}^{3}(x^2-x-6)\,dx=\int_{-t}^{-2}(x^2-x-6)\,dx+\int_{3}^{t}(x^2-x-6)\,dx$$
$$\int_{-t}^{-2}(x^2-x-6)\,dx+\int_{-2}^{3}(x^2-x-6)\,dx+\int_{3}^{t}(x^2-x-6)\,dx=0$$

よって　$\displaystyle\int_{-t}^{t}(x^2-x-6)\,dx=0$

偶関数，奇関数に注意して

$$2\int_{0}^{t}(x^2-6)\,dx=0 \qquad \left[\frac{1}{3}x^3-6x\right]_0^t=0$$
$$\frac{1}{3}t^3-6t=0$$
$$t(t^2-18)=0$$

$t \neq 0$ より　$t^2=18$

$t>3$ より　$t=\mathbf{3\sqrt{2}}$

第19講　微分法・積分法

$f(t)$ を t の2次関数とし，$g(x)=2x-5+\int_1^x f(t)\,dt$ とする．

$g(x)$ は $x=-1$ と $x=3$ で極値をとり，$x=2$ での曲線 $y=g(x)$ の接線の傾きが -9 である．

(1)　$g'(x)=$ **ア** x^2- **イ** $x-$ **ウ** である．

(2)　$g(x)=x^3-$ **エ** x^2- **オ** $x+$ **カ** である．

(3)　$g(x)$ の極大値は **キク**，極小値は **ケコサ** である．

解答例

(1)　$g(x)=2x-5+\int_1^x f(t)\,dt$　……①

①の両辺を x で微分すると　$g'(x)=2+f(x)$

$f(x)$ は2次関数より，$g'(x)$ も2次関数である．

さらに，$g(x)$ は $x=-1$，3で極値をもつので，$g'(x)=a(x+1)(x-3)$ とおける．

$x=2$ での曲線 $y=g(x)$ の接線の傾きが -9 より　$g'(2)=-9$

よって，$a\cdot3\cdot(-1)=-9$　　$a=3$

したがって　$g'(x)=3(x+1)(x-3)=\mathbf{3}x^2-\mathbf{6}x-\mathbf{9}$

(2)　$g(x)=\int g'(x)\,dx=x^3-3x^2-9x+C$（$C$ は積分定数）

ここで，①に $x=1$ を代入すると　$g(1)=-3+\int_1^1 f(t)\,dt=-3$

$g(1)=-11+C=-3$ より　$C=8$

よって　$g(x)=x^3-\mathbf{3}x^2-\mathbf{9}x+\mathbf{8}$

(3)　$g(x)$ の増減表は右図．

よって，$g(x)$ は

極大値 $g(-1)=\mathbf{13}$

極小値 $g(3)=\mathbf{-19}$

をとる．

x	…	-1	…	3	…
$g'(x)$	＋	0	−	0	＋
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

第20講　数列(1)

［1］　公比が正の数である等比数列について，初めの4項の和が45であり，次の4項の和が720であるという．この数列の初めの6項の和は［アイウ］である．

［2］　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $n(n+1)(n+2)$ で表される．

(1)　$a_n=$［エ］$n(n+$［オ］$)$ である．

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{a_k}=\frac{［カキ］}{［クケ］}$ である．

解答例

［1］　初項を a，公比を r $(r>0)$ とする．

初項から第4項までの和が45だから　$\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}=45$　……①

第5項から第8項までの和が720だから　$\dfrac{ar^4(r^4-1)}{r-1}=720$　……②

①を②に代入して　$r^4\times45=720$　　$r^4=16$

$r^2=4$　　$r>0$ より　$r=2$

①より　$\dfrac{a(16-1)}{2-1}=45$　　$a=3$

よって，求める和は　$\dfrac{3(2^6-1)}{2-1}=\mathbf{189}$

［2］(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_n=n(n+1)(n+2)$　……①

$a_1=S_1=1\cdot2\cdot3=6$

$n\geqq2$ のとき　$S_{n-1}=(n-1)n(n+1)$　……②

①－②より

$$S_n-S_{n-1}=n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)$$
$$=n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\}=3n(n+1)$$

つまり　$a_n=\mathbf{3}n(n+\mathbf{1})$　($n=1$ のときも成り立つ)

(2)
$$\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{3k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{31}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{31}\right)$$
$$=\mathbf{\frac{10}{31}}$$

第 22 講　平面ベクトル(1)

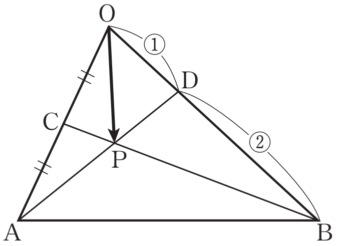
△OAB において，辺 OA の中点を C，辺 OB を 1：2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする．

(1)　AP：PD$=t:(1-t)$（ただし，$0<t<1$）として t の値を求めると，

$t=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である．

(2)　直線 OP と辺 AB の交点を Q とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である．

解答例



(1)　AP：PD$=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots\cdots①$$

また，BP：PC$=s:(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立より，①，②から

$$1-t=\frac{s}{2},\quad \frac{t}{3}=1-s$$

これらより　$t=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$，$s=\frac{4}{5}$

①より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{2}{5}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{\frac{1}{5}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2)　点 Q は直線 OP 上の点であるから，u を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2u}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{u}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表すことができる．

点 Q は辺 AB 上の点であるから

$$\frac{2u}{5}+\frac{u}{5}=1$$

$$u=\frac{5}{3}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{\frac{1}{3}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

第23講　平面ベクトル(2)

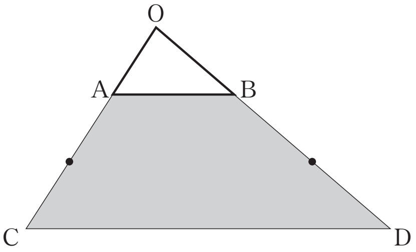
△OABにおいて，$|\overrightarrow{OA}|=4$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=12$である．また，$s$，$t$を実数とし，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$1\leqq s+2t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$となる点Pをとる．

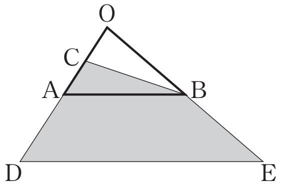
(1)　△OABの面積は［ア］である．

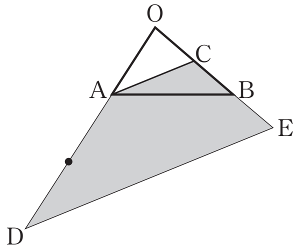
(2)　点Pの存在範囲は，［イ］の周および内部である．

［イ］は，次の①～③から適するものを選べ．

①　四角形ACDB　②　四角形CDEB　③　四角形ADEC







(3)　点Pの存在範囲を表す領域の面積は［ウエ］である．

解答例

(1)　$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2\times5^2-12^2}=\mathbf{8}$

(2)　$s+2t=k$とおくと，$1\leqq k\leqq 3$

$k\neq 0$より　$\frac{s}{k}+\frac{2t}{k}=1$，$\frac{s}{k}\geqq 0$，$\frac{2t}{k}\geqq 0$

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{2t}{k}\left(\frac{k}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$\frac{k}{2}\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC'}$とおくと

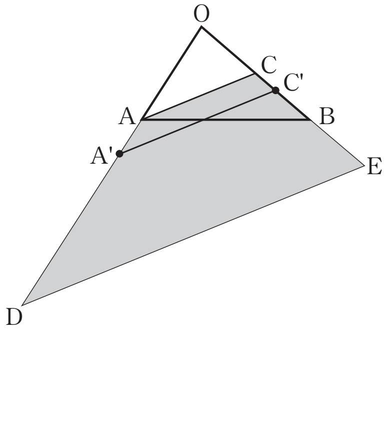
$$\overrightarrow{OP}=\frac{s}{k}\overrightarrow{OA'}+\frac{2t}{k}\overrightarrow{OC'}\quad\left(\frac{s}{k}+\frac{2t}{k}=1,\ \frac{s}{k}\geqq 0,\ \frac{2t}{k}\geqq 0\right)$$

よって，点Pが描く軌跡は線分A′C′である．

$1\leqq k\leqq 3$の範囲でkを動かすことにより，

点Pの存在範囲は，右の図の台形ADECの周および内部.(③)

$(\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OE}=3\overrightarrow{OC})$



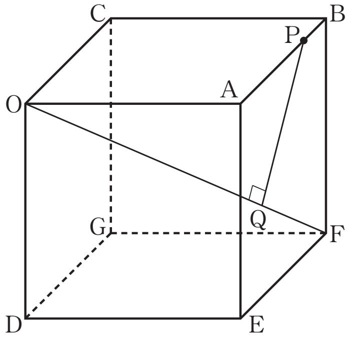
(3)　$\triangle OAC:\triangle ODE=1^2:3^2=1:9$より，

台形ADECの面積は

$$8\times\triangle OAC=8\times\frac{1}{2}\triangle OAB$$
$$=8\times4=\mathbf{32}$$

第24講　空間ベクトル

1辺の長さが1である立方体OABC-DEFGにおいて，
辺AB上に点P，対角線OF上に点Qをとる．
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とし，t，s を実数として
$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OF}$ とおくとき



(1)　$\overrightarrow{PQ}=($ ア $)\vec{a}+($ イ $)\vec{c}+($ ウ $)\vec{d}$ である．

ア ～ ウ は，次の①～⑥から適するものを選べ．

①　t　②　s　③　$t-1$
④　$s-1$　⑤　$t-s$　⑥　$s-t$

(2)　PQ⊥OF となるようにP，Qをとるとき，$t=$ エ $s-$ オ である．

(3)　(2)のとき，$PQ^2=$ カ s^2- キ $s+$ ク と表されるので，線分PQの長さの最小値は $\dfrac{\sqrt{\text{ケ}}}{\text{コ}}$ である．

解答例

(1)　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=\vec{a}+t\vec{c}$，$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OF}=s\left(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}\right)$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(s-1)\vec{a}+(s-t)\vec{c}+s\vec{d}$　(④，⑥，②)

(2)　PQ⊥OF より，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OF}=0$ であるから

$$\left\{(s-1)\vec{a}+(s-t)\vec{c}+s\vec{d}\right\}\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}\right)=0$$

$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{d}\right|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{d}=0$ より

$$(s-1)\left|\vec{a}\right|^2+(s-t)\left|\vec{c}\right|^2+s\left|\vec{d}\right|^2=0$$

$$(s-1)+(s-t)+s=0$$

よって　$t=\mathbf{3}s-\mathbf{1}$

(3)　$\overrightarrow{PQ}=(s-1)\vec{a}+(-2s+1)\vec{c}+s\vec{d}$

$$PQ^2=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=(s-1)^2\left|\vec{a}\right|^2+(-2s+1)^2\left|\vec{c}\right|^2+s^2\left|\vec{d}\right|^2$$

$$=(s-1)^2+(-2s+1)^2+s^2$$

$$=\mathbf{6}s^2-\mathbf{6}s+\mathbf{2}=6\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$0\leqq s\leqq 1$ より，$s=\dfrac{1}{2}$ のとき PQ^2 は最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる．

このとき，線分PQの長さも最小となり，最小値は $\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$

追加練習問題

第25講　数と式・方程式・不等式(1)

［1］　$a-b=-3$，$b-c=5$ のとき，$a-c=$ **ア** ，

$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=$ **イウ** である．

［2］　実数 x，y，z が $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$ および，$x=y-1=z+2$，$x>0$ を満たすとき，$x+y+z=\sqrt{\boxed{エ}}$ であり，

$x^3+y^3+z^3+x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である．

第 26 講　数と式・方程式・不等式(2)

［1］　不等式 $\dfrac{5x-6}{x-2}>x+1$ の解は，$x<$ **ア** $-\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，

ウ $<x<$ **エ** $+\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である．

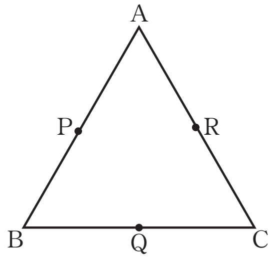
［2］　等式 $x^2-2xy+3y^2-4x+8y+6=0$ を満たす実数 x，y はただ 1 つ存在し，その値は $x=$ **カ**，$y=$ **キク** である．

［3］　a，b，c を実数とする．3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $f(1)+1=0$，$f(2)+2=0$，$f(3)+3=0$ を満たすとき，$a=$ **ケコ**，$b=$ **サシ**，$c=$ **スセ** である．

また，このとき，$f(x)$ を $x-5$ で割ったときの余りは **ソタ** である．

第 27 講　場合の数・確率(1)

右の図の三角形 ABC の各辺の中点をそれぞれ P，Q，R とする．



1 から 10 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードの中から 6 枚を選んで，6 個の点 A，B，C，P，Q，R の位置に 1 枚ずつ置く．このときの 6 枚のカードの置き方の総数について考える．

(1)　三角形の 3 つの頂点 A，B，C に 1，2，3 のカードを置く方法は **アイウエ** 通りある．

(2)　三角形の 3 つの頂点 A，B，C に奇数のカードを置く方法は **オカキクケ** 通りある．

(3)　奇数のカードが 3 枚並ぶ辺の数が 1 つになるようにカードを置く方法は **コサシスセ** 通りある．

第 28 講　場合の数・確率(2)

袋の中に玉が１個入っている．さいころを投げて次の操作を行う．

・出た目が１または２のときは，袋から玉を１個取り出す．

・出た目が３または４のときは，袋に別の玉を１個入れる．

・出た目が５または６のときは，袋の玉はそのままにする．

袋の中に玉がある限りこの操作を続行し，袋の中に玉がなくなったとき，操作を終了する．

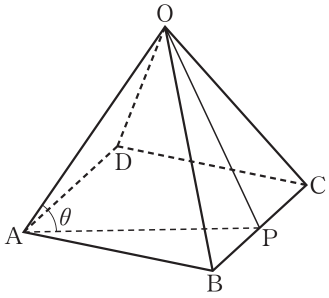
(1)　２回の操作で終了となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，３回以下の操作で終了となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

(2)　４回の操作で，袋の中の玉が４個になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である．

(3)　５回の操作で，袋の中の玉が４個になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$ である．

第 29 講　三角比・平面図形

各辺の長さがすべて 1 である正四角錐 O-ABCD において，
辺 BC 上に点 P をとり，BP＝x，AP＝y とする．
また，∠OAP＝θ とする．



このとき，$\cos\theta=\dfrac{x+\boxed{ア}}{\boxed{イ}\,y}$ と表されるので，△OAP の面積を S とすると，S は x を用いて

$$S=\frac{1}{\boxed{ウ}}\sqrt{\boxed{エ}x^2-\boxed{オ}x+\boxed{カ}}$$ と表される．

よって，S は $x=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ をとる．

第 30 講　関数総合(1)

a を定数とする．方程式 $|x^2-5x+4|-x+a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲は，$a<$ ア ， イ $<a<$ ウ である．

第 31 講　関数総合(2)

［1］　$0 \leqq x < \pi$ のとき，方程式 $\sin x + \sin 3x = -\cos x + \cos 3x$ を満たす x は

$x = \boxed{ア}$，$\dfrac{\pi}{\boxed{イ}}$，$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\pi$ である．

［2］　$0 \leqq x < \pi$ のとき，$\cos x \geqq \sin 2x$ を満たす x の値の範囲は

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{\boxed{オ}}$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi$ である．

［3］　a，b を定数とし，$a > b$ とする．$f(x) = a\cos^2 x + \sqrt{3}\,(a-b)\cos x \sin x + b\sin^2 x$ の最大値が 6，最小値が 2 となるとき，$a = \boxed{ク}$，$b = \boxed{ケ}$ である．

第 32 講　関数総合(3)

$a>0$ とする．$f(x)=x+x\log_{10}a+\log_{10}(a+1)$ と $g(x)=x+x\log_{10}(a+1)+\log_{10}a$ がある．

2 つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解 $x=t$ をもつとき，$t=$ [ア]，

$a=\dfrac{[イウ]+\sqrt{[エオ]}}{[カキ]}$ である．

第33講　関数総合(4)

座標平面上に3点A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(2,\ 3)$がある．

(1)　点Aを通り，直線BCに垂直な直線と直線BCとの交点をDとすると，Dの座標は，

$\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}\right)$である．

(2)　$\angle \mathrm{ACB}=\theta$とすると，$\tan\theta=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$である．次に，線分BC上に点Eを

$\angle \mathrm{EAB}=\theta$となるようにとると，Eの座標は，$\left(\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}},\ \dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)$である．

したがって，三角形ADEの面積は$\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$である．

第 34 講　関数総合(5)

直線 $y=x$ 上の点 $(a,\ a)$ から放物線 $y=x^2+1$ に 2 つの接線を引き，その接点を $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2+1)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2+1)$ とおく．点 A における接線と点 B における接線の交点を，α，β を用いて表すと

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\boxed{\text{ア}}},\ \alpha\beta+\boxed{\text{イ}}\right)$$

となる．これが $(a,\ a)$ に等しいから，$\alpha+\beta=\boxed{\text{ア}}\,a$，$\alpha\beta=a-\boxed{\text{イ}}$

よって，直線 AB の方程式を a で表すと，$y=\boxed{\text{ウ}}\,ax+\boxed{\text{エ}}-a$ である．

第 35 講　関数総合(6)

放物線 $C: y=x^2$ 上の x 座標が t である点における C の接線を l とする．ただし，$0<t<2$ とする．

(1)　直線 l が x 軸と交わる点の座標は，$\left(\dfrac{t}{\boxed{ア}},\ 0\right)$ である．

(2)　曲線 C と直線 l および x 軸で囲まれた部分と，曲線 C と直線 l および直線 $x=2$ で囲まれた部分の面積の和を S とすると，$S=-\dfrac{t^3}{\boxed{イ}}+\boxed{ウ}t^2-\boxed{エ}t+\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$

であり，S は $t=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$ をとる．

第 36 講　数列

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，初項がそれぞれ $a_1=1$，$b_1=1$ であり，次の関係式を満たす．

$a_{n+1}=3a_n+b_n+1$

$b_{n+1}=2a_n+4b_n-1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1)　数列 $\{a_n+b_n\}$ の一般項は，$\boxed{ア}\cdot\boxed{イ}^{n-1}$ である．

(2)　$2a_{n+1}-b_{n+1}=\boxed{ウ}(2a_n-b_n)+\boxed{エ}$ より，数列 $\{2a_n-b_n\}$ の一般項は，$\boxed{オ}^{n+1}-\boxed{カ}$ である．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\dfrac{1}{\boxed{キ}}\left(\boxed{ク}^{n+1}+\boxed{ケ}\cdot\boxed{コ}^{n-1}-\boxed{サ}\right)$ である．

第 37 講　ベクトル(1)

平行四辺形 OPQR は，OP＝5，OQ＝6，PQ＝7 を満たしているとする．△OPQ の内心を I とし，直線 OI と辺 PQ の交点を C とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおく．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}\vec{p}+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{イウ}}}\vec{q}$ である．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{p}+\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}\vec{q}$ である．

(3)　△OQR の内心を J とする．$k\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ と $\vec{p}$ が平行となるとき，$k=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である．

第38講　ベクトル(2)

2点 (2, 0, 1), (1, 1, 2) を通る直線がある．原点Oからこの直線に下ろした垂線の足をAとする．点Aの座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)$ であり，原点から点Aまでの距離は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

第 39 講　論証，証明

$x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α，β として，$a_n=\alpha^n+\beta^n$ （$n=1$，2，3，…）とする．

このとき，$a_1=$ **ア** ，$a_2=$ **イ** である．

次に，n が自然数のとき，a_n は整数であることを証明しよう．

［証明］「a_n は整数である」を(A)とする．

［1］　$n=1$，$n=2$ のとき

$a_1=$ ア ，$a_2=$ イ だから，(A)は成り立つ．

［2］　$n=k$，$k+1$ のとき，(A)が成り立つと仮定する．このとき，$a_{k+2}=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$ であり，右辺を a_k および a_{k+1} で表すと

$$a_{k+2}=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)$$
$$=\boxed{\text{ウ}}\,a_{k+1}-\boxed{\text{エ}}\,a_k \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，仮定により，$a_k=M$，$a_{k+1}=N$ （M，N は整数）と表せるので，①は

$$a_{k+2}=\boxed{\text{オ}}\,N-\boxed{\text{カ}}\,M$$

オ $N-$ カ M は整数だから，a_{k+2} も整数である．

よって，$n=k+2$ のときも(A)は成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について，(A)は成り立つ．

第40講　整数問題

[1]　$x<y<z$，$3x+2y+z=20$ を満たす自然数 x，y，z の組は全部で [ア] 組ある．

[2]　負でない整数 n に対して，$n^2-40n+279=(n-$ [イ] $)(n-$ [ウエ] $)$ と因数分解されるので，$n^2-40n+279$ が正の素数になるのは $n=$ [オ]，$n=$ [カキ] のときに限る．

第41講　総合問題(1)

a を実数とする．2次方程式 $3x^2-ax+1=0$ が異なる2つの実数解をもつような a の値の範囲は $a<$ アイ $\sqrt{\text{ウ}}$，エ $\sqrt{\text{オ}}<a$ である．このとき，2つの実数解がいずれも $\frac{1}{2}<x$ の範囲にあるような a の値の範囲は カ $\sqrt{\text{キ}}<a<\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である．また，2つの実数解のうちの1つだけが $\frac{1}{2}<x<1$ の範囲にあるような a の値の範囲は $\frac{\text{コ}}{\text{サ}}<a<$ シ である。

第42講　総合問題(2)

平行四辺形OABCにおいて，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，かつ $\angle AOC=120°$ であるとする．また，s，t を実数とし，2点P，Qをそれぞれ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OB}$ と定める．

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ である．

(2)　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}t$ である．

(3)　内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}$ が0のとき，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\boxed{カ}s^2-\boxed{キ}s+\boxed{ク}$ である．

(4)　(3)の条件のもとで，さらに点Qが線分OB上にあるような s の値の範囲は

$$\dfrac{\boxed{ケ}-\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}\leqq s\leqq\dfrac{\boxed{シ}+\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$$ である．

第 43 講　総合問題(3)

平面上の点 A(6, 2) を通る傾き $-k$ の直線 l を考える．ただし，$k>0$ とする．直線 l が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ B，C とし，原点を O とするとき，△OBC の面積の最小値は **アイ** であり，そのときの k の値は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

第 44 講　総合問題(4)

△ABC において，AB＝4，BC＝7，CA＝$\sqrt{23}$ とし，点 A から辺 BC へ下ろした垂線と BC の交点を D とする．

(1)　cos∠ABC＝$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，AD＝$\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

(2)　点 C から直線 AB へ下ろした垂線と直線 AB との交点を E とすると，点 E は辺 AB の A 側の延長上にあり，BE＝$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，cos∠DAE＝$\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

(3)　直線 AD と直線 CE の交点を F とするとき，△ABF の外接円の半径は

$\dfrac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サシス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である．

第 45 講　総合問題(5)

n を自然数，i を虚数単位とする．0 と書かれたカードが 1 枚，1，-1，i，$-i$ と書かれたカードがそれぞれ n 枚，合計 $4n+1$ 枚ある．これらのカードをよくまぜて，左から右に一列に並べる．左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき，

(1)　積 $X_1X_2X_3$ が 0 となる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}\,n+\boxed{\text{ウ}}}$ である．

(2)　積 $X_1X_2X_3$ が実数となる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{エ}}\,(n+1)}{\boxed{\text{オ}}\,n+\boxed{\text{カ}}}$ である．

(3)　和 X_1+X_2 が実数となる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{キ}}\,n+\boxed{\text{ク}}}{2(\boxed{\text{ケ}}\,n+\boxed{\text{コ}})}$ である．

第 46 講　総合問題(6)

(1)　$\frac{5}{6} < \log_{10} 7 < \frac{6}{7}$ であることを用いると，7^{42} は アイ 桁の整数であることがわかる．

(2)　$\log_{10} 15$ に最も近い値は ウ であり，$\log_{10} 19$ に最も近い値は，$18 < 19 < 20$ であることを利用すると エ である．

ただし，近似値として，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いてよい．

ウ ， エ は，次の①～⑥のうちからあてはまるものを選べ．

①　1.13　　②　1.18　　③　1.23　　④　1.28　　⑤　1.33　　⑥　1.38

第47講　総合問題(7)

さいころを投げる操作を繰り返し，5以上の目が合計3回出たところで終了とする．
n を3以上の自然数とし，n 回目の操作で終了する確率を p_n とするとき

(1) $p_n=\dfrac{(n-\boxed{ア})(n-\boxed{イ})\cdot\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

ただし，$\boxed{ア}<\boxed{イ}$ とし，$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ は次の①～⑧からあてはまるものを選べ．

① 2^{n-1}　② 2^{n-2}　③ 2^{n-3}　④ 2^{n-4}

⑤ 3^{n-1}　⑥ 3^{n}　⑦ 3^{n+1}　⑧ 3^{n+2}

(2) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ を n の式で表すと，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\dfrac{\boxed{オ}\,n}{\boxed{カ}(n-\boxed{キ})}$ となる．

したがって，p_n を最大にする n は，$\boxed{ク}$ または $\boxed{ケ}$ である．

ただし，$\boxed{ク}<\boxed{ケ}$ とする．

第 48 講　総合問題(8)

一般項が $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある.

(1)　$a_1=$ ア，$a_2=$ イ である.

(2)　$a_{n+2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right\}$

$$=\frac{\boxed{ウ}}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}+\frac{\boxed{エ}}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}$$

と表されるので，a_n，a_{n+1}，a_{n+2} の間に成り立つ関係式は オ である.

オ は，次の①～④からあてはまるものを選べ.

①　$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$　　②　$a_{n+2}=a_n+2a_{n+1}$

③　$a_{n+2}=2a_n+a_{n+1}$　　④　$a_{n+2}=5a_n+a_{n+1}$

この結果，$a_5=$ カ，$a_{10}=$ キク である.

追加練習問題解答

第25講　数と式・方程式・不等式(1)

［1］ $a-b=-3$，$b-c=5$ のとき，$a-c=$ **ア**，

$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=$ **イウ** である．

［2］ 実数 x，y，z が $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$ および，$x=y-1=z+2$，$x>0$ を満たすとき，$x+y+z=\sqrt{\boxed{エ}}$ であり，

$x^3+y^3+z^3+x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である．

解答例

［1］ $a-c=(a-b)+(b-c)=-3+5=\mathbf{2}$

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\times(9+25+4)=\mathbf{19}$$

［2］ $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$ ……①

$x=y-1=z+2$ ……②

②より　$y=x+1$，$z=x-2$

①に代入すると　$(3x-1)^2=x^2+(x+1)^2+(x-2)^2$

$3x^2-2x-2=0$　　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}$　　$x>0$ より　$x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$

よって　$x+y+z=3x-1=\sqrt{\mathbf{7}}$

次に　$x^3+y^3+z^3+x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$

$=x^3+y^3+z^3+x^2(\sqrt{7}-x)+y^2(\sqrt{7}-y)+z^2(\sqrt{7}-z)$

$=\sqrt{7}(x^2+y^2+z^2)$

$=\sqrt{7}(x+y+z)^2=\sqrt{7}\cdot(\sqrt{7})^2=\mathbf{7\sqrt{7}}$

第26講　数と式・方程式・不等式(2)

[1]　不等式 $\dfrac{5x-6}{x-2}>x+1$ の解は，$x<$ ア $-\sqrt{\text{イ}}$，

ウ $<x<$ エ $+\sqrt{\text{オ}}$ である．

[2]　等式 $x^2-2xy+3y^2-4x+8y+6=0$ を満たす実数 x，y はただ1つ存在し，その値は $x=$ カ，$y=$ キク である．

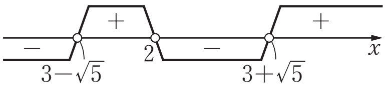
[3]　a，b，c を実数とする．3次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $f(1)+1=0$，$f(2)+2=0$，$f(3)+3=0$ を満たすとき，$a=$ ケコ，$b=$ サシ，$c=$ スセ である．

　また，このとき，$f(x)$ を $x-5$ で割ったときの余りは ソタ である．

解答例

[1]　$\dfrac{5x-6}{x-2}>x+1$ の両辺に $(x-2)^2$ (>0) をかけると

$$(5x-6)(x-2)>(x+1)(x-2)^2$$
$$(x-2)\{(x+1)(x-2)-(5x-6)\}<0$$
$$(x-2)(x^2-6x+4)<0$$
$$(x-2)\{x-(3+\sqrt{5})\}\{x-(3-\sqrt{5})\}<0$$



これを満たす x の値の範囲は

$$x<\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{5}},\ \mathbf{2}<x<\mathbf{3}+\sqrt{\mathbf{5}}$$

[2]　$x^2-2xy+3y^2-4x+8y+6=0$ を x について整理すると

$$x^2-2(y+2)x+(3y^2+8y+6)=0 \quad \cdots\cdots①$$

これを x の2次方程式とみると，x は実数より，判別式 $D\geqq 0$

$$\frac{D}{4}=(y+2)^2-(3y^2+8y+6)$$
$$=-2y^2-4y-2\geqq 0$$
$$y^2+2y+1\leqq 0 \qquad (y+1)^2\leqq 0$$

よって　$y=-1$

このとき，①より　$x^2-2x+1=0$　　$(x-1)^2=0$　　$x=1$

以上より　$x=\mathbf{1}$，$y=\mathbf{-1}$

[3]　$f(1)+1=0$，$f(2)+2=0$，$f(3)+3=0$ より，$g(x)=f(x)+x$ とおくと，$g(1)=0$，$g(2)=0$，$g(3)=0$ である．

よって　$g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

$$f(x)=g(x)-x=x^3-6x^2+10x-6$$

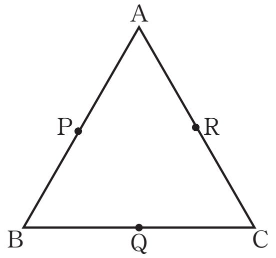
したがって　$a=\mathbf{-6}$，$b=\mathbf{10}$，$c=\mathbf{-6}$

また，$f(x)$ を $x-5$ で割ったときの余りは

$$f(5)=g(5)-5$$
$$=4\cdot 3\cdot 2-5=\mathbf{19}$$

第 27 講　場合の数・確率(1)

右の図の三角形 ABC の各辺の中点をそれぞれ P，Q，R とする．



1 から 10 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードの中から 6 枚を選んで，6 個の点 A，B，C，P，Q，R の位置に 1 枚ずつ置く．このときの 6 枚のカードの置き方の総数について考える．

(1)　三角形の 3 つの頂点 A，B，C に 1，2，3 のカードを置く方法は **アイウエ** 通りある．

(2)　三角形の 3 つの頂点 A，B，C に奇数のカードを置く方法は **オカキクケ** 通りある．

(3)　奇数のカードが 3 枚並ぶ辺の数が 1 つになるようにカードを置く方法は **コサシスセ** 通りある．

解答例

(1)　1，2，3 のカードを A，B，C に置く方法は　3! 通り

その各々について，P，Q，R に残りのカードを置く方法は　${}_7P_3$ 通り．

求める場合の数は　$3!\times{}_7P_3=$ **1260** (通り)

(2)　A，B，C に奇数のカードを置く方法は　${}_5P_3$ 通り．

その各々について，P，Q，R に残りのカードを置く方法は　${}_7P_3$通り．

求める場合の数は　${}_5P_3\times{}_7P_3=$ **12600** (通り)

(3)　A，P，B に奇数が並んでいるとき，その並べ方は　${}_5P_3=60$ (通り)

このとき，条件を満たすのは，C，Q，R に残り 7 枚のカードから 3 枚選んで並べる ${}_7P_3$ 通りのうち，C と Q が奇数，または C と R が奇数である場合を除くと

$${}_7P_3-(2!\times5)\times2=210-20=190\ (通り)$$

B，Q，C や A，R，C に奇数が並ぶときも同様である．

以上より，求める場合の数は

$(60\times190)\times3=$ **34200** (通り)

第 28 講　場合の数・確率(2)

袋の中に玉が 1 個入っている．さいころを投げて次の操作を行う．

・出た目が 1 または 2 のときは，袋から玉を 1 個取り出す．

・出た目が 3 または 4 のときは，袋に別の玉を 1 個入れる．

・出た目が 5 または 6 のときは，袋の玉はそのままにする．

袋の中に玉がある限りこの操作を続行し，袋の中に玉がなくなったとき，操作を終了する．

(1)　2 回の操作で終了となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，3 回以下の操作で終了となる確率は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}}$ である．

(2)　4 回の操作で，袋の中の玉が 4 個になる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ である．

(3)　5 回の操作で，袋の中の玉が 4 個になる確率は $\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シスセ}}$ である．

解答例

(1)　さいころを投げて，1 または 2 の目が出るという事象を p，3 または 4 の目が出るという事象を q，5 または 6 の目が出るという事象を r とすると，それぞれが起こる確率はいずれも $\dfrac{1}{3}$ である．

2 回の操作で終了するのは，r，p が順に起こる場合だから，その確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{9}}\quad\cdots\cdots①$$

また 1 回の操作で終了となる確率は，$\dfrac{1}{3}$　$\cdots\cdots$②

3 回の操作で終了となるのは，

・q，p，p が順に起こる　　・r，r，p が順に起こる

このいずれかの場合だから，その確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times 2=\dfrac{2}{27}$　$\cdots\cdots$③

①，②，③より，3 回以下の操作で終了する確率は $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{27}=\mathbf{\dfrac{14}{27}}$

(2)　4 回の操作で，袋の中の玉が 4 個になるのは，4 回のうち q が 3 回，r が 1 回起こる場合である．その確率は $\dfrac{4!}{3!1!}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\dfrac{1}{3}=\mathbf{\dfrac{4}{81}}$

(3)　5 回の操作で，袋の中の玉が 4 個になるのは，次の(ⅰ)，(ⅱ)の場合がある．

(ⅰ)　5 回中，1 回目は q が起こり，2 回目以降は p が 1 回，q が 3 回起こる

(ⅱ)　5 回中 q が 3 回，r が 2 回起こる

(ⅰ)の起こる確率は　$\frac{1}{3}\times\left\{\frac{4!}{1!3!}\times\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}=\frac{4}{243}$

(ⅱ)の起こる確率は　$\frac{5!}{3!2!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{243}$

よって，求める確率は　$\frac{4}{243}+\frac{10}{243}=\mathbf{\frac{14}{243}}$

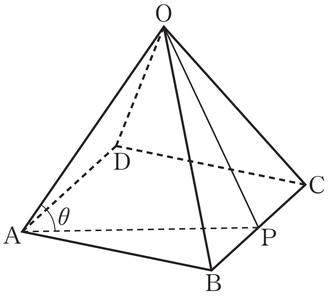
第29講　三角比・平面図形

各辺の長さがすべて1である正四角錐 O-ABCD において，辺 BC 上に点 P をとり，BP$=x$，AP$=y$ とする．
また，$\angle$OAP$=\theta$ とする．

このとき，$\cos\theta=\dfrac{x+\boxed{ア}}{\boxed{イ}\,y}$ と表されるので，△OAP の面積を S とすると，S は x を用いて

$S=\dfrac{1}{\boxed{ウ}}\sqrt{\boxed{エ}\,x^2-\boxed{オ}\,x+\boxed{カ}}$ と表される．

よって，S は $x=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ をとる．



解答例

△ABP において　$y^2=x^2+1$

△OBP において，余弦定理より

$$\mathrm{OP}^2=x^2+1^2-2x\cdot1\cdot\cos60^\circ=x^2-x+1$$

△OAP において，余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{1+y^2-(x^2-x+1)}{2\cdot1\cdot y}=\frac{1+(x^2+1)-(x^2-x+1)}{2y}=\boldsymbol{\frac{x+1}{2y}}$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{x+1}{2y}\right)^2=\frac{4y^2-(x+1)^2}{4y^2}$$

$$=\frac{4(x^2+1)-(x+1)^2}{4y^2}=\frac{3x^2-2x+3}{4y^2}$$

$\sin\theta\geqq0$ より　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3x^2-2x+3}}{2y}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot y\cdot\sin\theta=\dfrac{y}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3x^2-2x+3}}{2y}$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\sqrt{3x^2-2x+3}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}}$$

$0\leqq x\leqq1$ の範囲で，S は $x=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ のとき最小で，最小値は

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{6}}$$

第 30 講　関数総合(1)

a を定数とする．方程式 $|x^2-5x+4|-x+a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲は，$a<$ ア ， イ $<a<$ ウ である．

解答例

$|x^2-5x+4|-x+a=0$ ……①

①より　$a=x-|(x-1)(x-4)|$

$f(x)=x-|(x-1)(x-4)|$ とおく．

$x<1$，$4<x$ のとき

$$f(x)=x-(x-1)(x-4)$$
$$=-x^2+6x-4=-(x-3)^2+5$$

$1\leqq x\leqq 4$ のとき

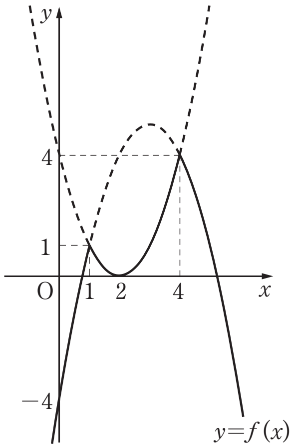
$$f(x)=x+(x-1)(x-4)$$
$$=x^2-4x+4=(x-2)^2$$

$y=f(x)$ のグラフは右図．

①が異なる 2 つの実数解をもつのは，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が 2 点を共有するときである．

そのような a の値の範囲は

$$a<\mathbf{0},\ \mathbf{1}<a<\mathbf{4}$$



第31講　関数総合(2)

［1］　$0 \leqq x < \pi$ のとき，方程式 $\sin x + \sin 3x = -\cos x + \cos 3x$ を満たす x は

$x=$ ア ，$\dfrac{\pi}{\text{イ}}$，$\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}\pi$ である．

［2］　$0 \leqq x < \pi$ のとき，$\cos x \geqq \sin 2x$ を満たす x の値の範囲は

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{\text{オ}}$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}\pi$ である．

［3］　a，b を定数とし，$a > b$ とする．$f(x) = a\cos^2 x + \sqrt{3}(a-b)\cos x \sin x + b\sin^2 x$ の最大値が 6，最小値が 2 となるとき，$a=$ ク ，$b=$ ケ である．

解答例

［1］　$\sin x + \sin 3x = -\cos x + \cos 3x$

$\sin x + 3\sin x - 4\sin^3 x = -\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\sin^3 x + \cos^3 x - \sin x - \cos x = 0$

$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) - (\sin x + \cos x) = 0$

$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x - 1) = 0$

$\sin x \cos x(\sin x + \cos x) = 0$

よって　$\sin x = 0$，$\cos x = 0$，$\sin x + \cos x = 0$

$0 \leqq x < \pi$ の範囲で $\sin x = 0$ を満たす x は　$x = 0$

$0 \leqq x < \pi$ の範囲で $\cos x = 0$ を満たす x は　$x = \dfrac{\pi}{2}$

また，$\sin x + \cos x = 0$ より　$\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{5}{4}\pi$ であるから，$x + \dfrac{\pi}{4} = \pi$　　$x = \dfrac{3}{4}\pi$

以上より，求める解は　$x = \mathbf{0}$，$\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}$，$\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\pi$

［2］　$\cos x \geqq \sin 2x$ より　$\cos x \geqq 2\sin x \cos x$　　$\cos x(2\sin x - 1) \leqq 0$

したがって，$\cos x \geqq 0$ かつ $\sin x \leqq \dfrac{1}{2}$　……①

または，　$\cos x \leqq 0$ かつ $\sin x \geqq \dfrac{1}{2}$　……②

$0 \leqq x < \pi$ の範囲で，①を満たす x は　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}$

$0 \leqq x < \pi$ の範囲で，②を満たす x は　$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$

以上より，求める解は　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{\mathbf{6}}$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\pi$

[3]　$f(x)=a\cos^2 x+\sqrt{3}(a-b)\cos x\sin x+b\sin^2 x$

$$=\frac{a}{2}(1+\cos 2x)+\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)\sin 2x+\frac{b}{2}(1-\cos 2x)$$

$$=\frac{a+b}{2}+(a-b)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)$$

$$=\frac{a+b}{2}+(a-b)\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

よって，$f(x)$ は $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ のとき最大で，最大値は

$$\frac{a+b}{2}+(a-b)=\frac{3a-b}{2}$$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき最小で，最小値は

$$\frac{a+b}{2}-(a-b)=\frac{-a+3b}{2}$$

最大値が 6，最小値が 2 であるから

$$\frac{3a-b}{2}=6,\quad \frac{-a+3b}{2}=2$$

これを解いて　$a=\mathbf{5}$，$b=\mathbf{3}$

第 32 講　関数総合(3)

$\alpha>0$ とする．$f(x)=x+x\log_{10}\alpha+\log_{10}(\alpha+1)$ と $g(x)=x+x\log_{10}(\alpha+1)+\log_{10}\alpha$ がある．

2 つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解 $x=t$ をもつとき，$t=$ ア ，

$\alpha=\dfrac{\boxed{イウ}+\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カキ}}$ である．

解答例

$f(x)=0$，$g(x)=0$ の共通解が $x=t$ であるとき

$$f(t)=t+t\log_{10}\alpha+\log_{10}(\alpha+1)=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$g(t)=t+t\log_{10}(\alpha+1)+\log_{10}\alpha=0 \quad \cdots\cdots②$$

②－①より　$(t-1)\{\log_{10}(\alpha+1)-\log_{10}\alpha\}=0$

$\log_{10}(\alpha+1)-\log_{10}\alpha\neq 0$ であるから　$t-1=0$

よって　$t=\mathbf{1}$

①に代入すると　$1+\log_{10}\alpha+\log_{10}(\alpha+1)=0$

$$\log_{10}\{10\alpha(\alpha+1)\}=0$$

$$10\alpha(\alpha+1)=1$$

$$10\alpha^2+10\alpha-1=0$$

$\alpha>0$ だから　$\alpha=\dfrac{\mathbf{-5+\sqrt{35}}}{\mathbf{10}}$

第33講　関数総合(4)

座標平面上に3点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(2,\ 3)$ がある．

(1)　点Aを通り，直線BCに垂直な直線と直線BCとの交点をDとすると，Dの座標は，

$\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}\right)$ である．

(2)　$\angle ACB=\theta$ とすると，$\tan\theta=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である．次に，線分BC上に点Eを

$\angle EAB=\theta$ となるようにとると，Eの座標は，$\left(\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}},\ \dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)$ である．

したがって，三角形ADEの面積は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である．

解答例

(1)　直線BCの方程式は　$y=3(x-1)$　……①

点Aを通り，直線BCに垂直な直線の方程式は　$y=-\dfrac{1}{3}(x+1)$　……②

①，②より　$x=\dfrac{4}{5}$，$y=-\dfrac{3}{5}$

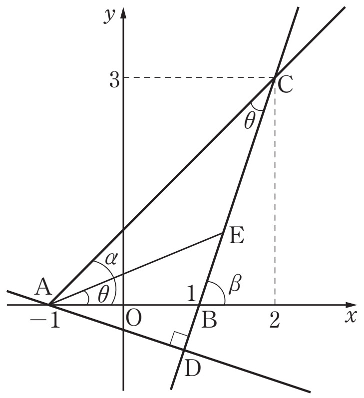
よって，点Dの座標は $\left(\mathbf{\dfrac{4}{5}},\ -\mathbf{\dfrac{3}{5}}\right)$

(2)　直線AC，BCと x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とすると

$$\tan\alpha=1,\ \tan\beta=3$$

$\theta=\beta-\alpha$ だから

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{3-1}{1+3\cdot1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$



直線AEの傾きは $\tan\theta$，つまり $\dfrac{1}{2}$ だから，

直線AEの式は　$y=\dfrac{1}{2}(x+1)$　……③

①，③より　$x=\dfrac{7}{5}$，$y=\dfrac{6}{5}$

よって，点Eの座標は $\left(\mathbf{\dfrac{7}{5}},\ \mathbf{\dfrac{6}{5}}\right)$

$$\triangle ADE=\triangle AEB+\triangle ADB=\frac{1}{2}AB\times\frac{6}{5}+\frac{1}{2}AB\times\frac{3}{5}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times\frac{6}{5}+\frac{1}{2}\times2\times\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{9}{5}}$$

第 34 講　関数総合(5)

直線 $y=x$ 上の点 $(a,\ a)$ から放物線 $y=x^2+1$ に 2 つの接線を引き，その接点を $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2+1)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2+1)$ とおく．点 A における接線と点 B における接線の交点を，α，β を用いて表すと

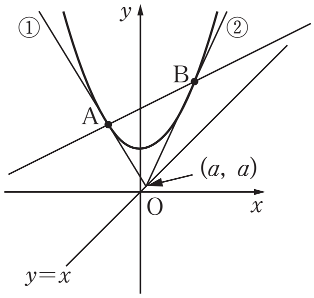
$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\boxed{\text{ア}}},\ \alpha\beta+\boxed{\text{イ}}\right)$$

となる．これが $(a,\ a)$ に等しいから，$\alpha+\beta=\boxed{\text{ア}}\,a$，$\alpha\beta=a-\boxed{\text{イ}}$

よって，直線 AB の方程式を a で表すと，$y=\boxed{\text{ウ}}\,ax+\boxed{\text{エ}}-a$ である．

解答例

$y=x^2+1$ より　$y'=2x$



$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2+1)$ における接線の方程式は

$$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2+1$$

すなわち　$y=2\alpha x-\alpha^2+1$　……①

また，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2+1)$ における接線の方程式は

$$y=2\beta x-\beta^2+1 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より　$2\alpha x-\alpha^2+1=2\beta x-\beta^2+1$

$$2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2 \qquad x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$y=2\alpha\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha^2+1=\alpha\beta+1$$

よって，①，②の交点の座標は　$\left(\frac{\alpha+\beta}{\mathbf{2}},\ \alpha\beta+\mathbf{1}\right)$

これが $(a,\ a)$ に等しいから　$\frac{\alpha+\beta}{2}=a$，$\alpha\beta+1=a$

$$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a-1$$

よって，直線 AB の方程式は

$$y-(\alpha^2+1)=\frac{(\alpha^2+1)-(\beta^2+1)}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$$

$$y=(\alpha+\beta)(x-\alpha)+\alpha^2+1$$

$$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta+1$$

すなわち　$y=\mathbf{2}ax+\mathbf{2}-a$

第35講　関数総合(6)

放物線 $C: y=x^2$ 上の x 座標が t である点における C の接線を l とする．ただし，$0<t<2$ とする．

(1)　直線 l が x 軸と交わる点の座標は，$\left(\dfrac{t}{\boxed{ア}},\ 0\right)$ である．

(2)　曲線 C と直線 l および x 軸で囲まれた部分と，曲線 C と直線 l および直線 $x=2$ で囲まれた部分の面積の和を S とすると，$S=-\dfrac{t^3}{\boxed{イ}}+\boxed{ウ}t^2-\boxed{エ}t+\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$

であり，S は $t=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$ をとる．

解答例

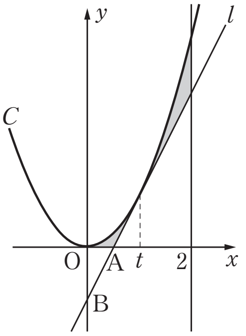
(1)　$y=x^2$ より　$y'=2x$

C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$y=2t(x-t)+t^2$　すなわち　$y=2tx-t^2$

$y=0$ のとき　$0=2tx-t^2$　　$x=\dfrac{t}{2}$

よって，直線 l と x 軸との交点の座標は　$\left(\dfrac{t}{\mathbf{2}},\ 0\right)$



(2)　直線 l と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ A，B とすると

$$\mathrm{A}\left(\frac{t}{2},\ 0\right),\ \mathrm{B}(0,\ -t^2)$$

$$S=\int_0^2\{x^2-(2tx-t^2)\}\,dx-\triangle\mathrm{OAB}$$

$$=\int_0^2(x-t)^2\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2}\cdot t^2$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^2-\frac{1}{4}t^3$$

$$=\frac{1}{3}(2-t)^3+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^3=-\frac{t^3}{\mathbf{4}}+\mathbf{2}t^2-\mathbf{4}t+\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$$

$f(t)=-\dfrac{t^3}{4}+2t^2-4t+\dfrac{8}{3}$ とおくと

$$f'(t)=-\frac{3}{4}t^2+4t-4$$

$$=-\frac{1}{4}(t-4)(3t-4)$$

$0<t<2$ における $f(t)$ の増減は右表．

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小	↗	

よって，S は $t=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ のとき最小となる．

最小値は　$-\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^3+2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2-4\cdot\dfrac{4}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{27}}$

第 36 講　数列

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，初項がそれぞれ $a_1=1$，$b_1=1$ であり，次の関係式を満たす．

$a_{n+1}=3a_n+b_n+1$

$b_{n+1}=2a_n+4b_n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1)　数列 $\{a_n+b_n\}$ の一般項は，$\boxed{ア}\cdot\boxed{イ}^{n-1}$ である．

(2)　$2a_{n+1}-b_{n+1}=\boxed{ウ}(2a_n-b_n)+\boxed{エ}$ より，数列 $\{2a_n-b_n\}$ の一般項は，$\boxed{オ}^{n+1}-\boxed{カ}$ である．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\dfrac{1}{\boxed{キ}}\left(\boxed{ク}^{n+1}+\boxed{ケ}\cdot\boxed{コ}^{n-1}-\boxed{サ}\right)$ である．

解答例

(1)　$a_{n+1}=3a_n+b_n+1$　……①

$b_{n+1}=2a_n+4b_n-1$　……②

①＋②より　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

$a_1+b_1=2$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は，初項 2，公比 5 の等比数列だから

$a_n+b_n=\mathbf{2\cdot5}^{n-1}$　……③

(2)　①×2－② より

$2a_{n+1}-b_{n+1}=4a_n-2b_n+3$

$2a_{n+1}-b_{n+1}=\mathbf{2}(2a_n-b_n)+\mathbf{3}$

$2a_n-b_n=c_n$ とおくと　$c_{n+1}=2c_n+3$

変形すると　$c_{n+1}+3=2(c_n+3)$

また，$c_1=2a_1-b_1=1$

数列 $\{c_n+3\}$ は初項 $c_1+3=4$，公比 2 の等比数列だから

$c_n+3=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$　　$c_n=2^{n+1}-3$

よって　$2a_n-b_n=\mathbf{2}^{n+1}-\mathbf{3}$　……④

(3)　③＋④より　$3a_n=2^{n+1}+2\cdot5^{n-1}-3$

$$a_n=\frac{1}{\mathbf{3}}(\mathbf{2}^{n+1}+\mathbf{2}\cdot\mathbf{5}^{n-1}-\mathbf{3})$$

第 37 講　ベクトル(1)

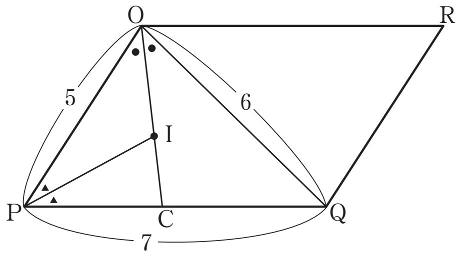
平行四辺形 OPQR は，OP＝5，OQ＝6，PQ＝7 を満たしているとする．△OPQ の内心を I とし，直線 OI と辺 PQ の交点を C とする．また，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$ とおく．

(1)　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}\vec{p}+\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{イウ}}\vec{q}$ である．

(2)　$\overrightarrow{OI}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{p}+\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}\vec{q}$ である．

(3)　△OQR の内心を J とする．$k\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}$ と $\vec{p}$ が平行となるとき，$k=\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ である．

解答例



(1)　∠POC＝∠QOC より

$$PC:QC=OP:OQ=5:6$$

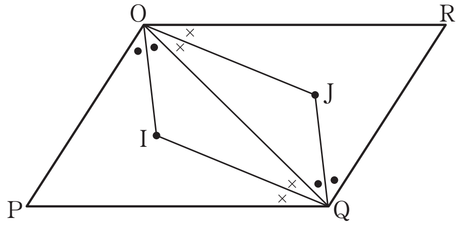
よって　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{6\overrightarrow{OP}+5\overrightarrow{OQ}}{5+6}=\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{11}}\vec{p}+\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{11}}\vec{q}$

(2)　$PC=\dfrac{5}{11}PQ=\dfrac{35}{11}$，∠OPI＝∠CPI より

$$OI:CI=PO:PC=5:\frac{35}{11}=11:7$$

よって　$\overrightarrow{OI}=\dfrac{11}{18}\overrightarrow{OC}=\dfrac{11}{18}\left(\dfrac{6}{11}\vec{p}+\dfrac{5}{11}\vec{q}\right)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{p}+\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{18}}\vec{q}$

(3)　右図のように，



∠IOQ＝∠JQO，∠JOQ＝∠IQO

であるから，OI∥JQ，OJ∥IQ である．

よって，四角形 OIQJ は平行四辺形であるから

$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{JQ}$ となる．

$$\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QJ}$$
$$=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OI}$$

$$k\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}=k\overrightarrow{OI}-\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OI}\right)$$
$$=(k+1)\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OQ}$$
$$=(k+1)\left(\frac{1}{3}\vec{p}+\frac{5}{18}\vec{q}\right)-\vec{q}$$
$$=\frac{k+1}{3}\vec{p}+\frac{5k-13}{18}\vec{q}$$

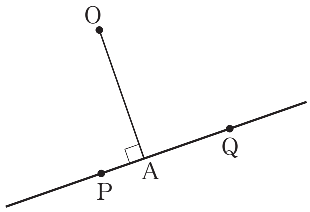
これが $\vec{p}$ と平行となるとき　$5k-13=0$

よって　$k=\dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}}$

第 38 講　ベクトル(2)

2 点 (2, 0, 1), (1, 1, 2) を通る直線がある．原点 O からこの直線に下ろした垂線の足を A とする．点 A の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)$ であり，原点から点 A までの距離は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

解答例



2 点を P(2, 0, 1), Q(1, 1, 2) とすると

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(-1,\ 1,\ 1)$$

点 A は直線 PQ 上の点であるから，実数 t を用いて

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{PQ}$ と表される。このとき

$$\overrightarrow{OA}=(2,\ 0,\ 1)+t(-1,\ 1,\ 1)$$
$$=(2-t,\ t,\ 1+t)\quad \cdots\cdots ①$$

PQ⊥OA より，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ であるから

$$-(2-t)+t+(1+t)=0 \qquad t=\frac{1}{3}$$

①より，$\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ であるから，点 A の座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{1}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{4}{3}}\right)$

また　$\mathrm{OA}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{42}}{3}}$

第 39 講　論証，証明

$x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α，β として，$a_n=\alpha^n+\beta^n$（$n=1$，2，3，…）とする．

このとき，$a_1=$ **ア** ，$a_2=$ **イ** である．

次に，n が自然数のとき，a_n は整数であることを証明しよう．

［証明］「a_n は整数である」を(A)とする．

［1］　$n=1$，$n=2$ のとき

　$a_1=$ ア ，$a_2=$ イ だから，(A)は成り立つ．

［2］　$n=k$，$k+1$ のとき，(A)が成り立つと仮定する．このとき，$a_{k+2}=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$ であり，右辺を a_k および a_{k+1} で表すと

$$a_{k+2}=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)$$
$$= \boxed{ウ}\, a_{k+1}-\boxed{エ}\, a_k \quad \cdots\cdots ①$$

　ここで，仮定により，$a_k=M$，$a_{k+1}=N$（M，N は整数）と表せるので，①は

$$a_{k+2}=\boxed{オ}\, N-\boxed{カ}\, M$$

　オ $N-$ カ M は整数だから，a_{k+2} も整数である．

　よって，$n=k+2$ のときも(A)は成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について，(A)は成り立つ．

解答例

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=4$

［証明］「a_n は整数である」を(A)とする．

［1］　$n=1$ のとき

　$a_1=\alpha+\beta=\mathbf{3}$

　$n=2$ のとき

　$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-8=\mathbf{1}$

　$a_1=3$，$a_2=1$ だから，(A)は成り立つ．

［2］　$n=k$，$k+1$ のとき，(A)が成り立つと仮定する．このとき，$a_{k+2}=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$ であり，右辺を a_k および a_{k+1} で表すと

$$a_{k+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)$$
$$=(\alpha+\beta)a_{k+1}-\alpha\beta a_k=\mathbf{3}a_{k+1}-\mathbf{4}a_k \quad \cdots\cdots ①$$

　ここで，仮定により，$a_k=M$，$a_{k+1}=N$（M，N は整数）と表せるので，①は

$$a_{k+2}=\mathbf{3}N-\mathbf{4}M$$

　$3N-4M$ は整数だから，a_{k+2} も整数である．

　よって，$n=k+2$ のときも(A)は成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について，(A)は成り立つ．

第40講　整数問題

[1]　$x<y<z$，$3x+2y+z=20$ を満たす自然数 x，y，z の組は全部で［ア］組ある．

[2]　負でない整数 n に対して，$n^2-40n+279=(n-$［イ］$)(n-$［ウエ］$)$ と因数分解されるので，$n^2-40n+279$ が正の素数になるのは $n=$［オ］，$n=$［カキ］のときに限る．

解答例

[1]　x，y，z は自然数で，$x<y<z$ より，$y>x$，$z>x$ だから

$$3x+2y+z=20 \quad \cdots\cdots①$$
$$3x+2x+x<20$$
$$6x<20$$
$$x<\frac{10}{3}$$

したがって，①を満たす自然数 x の値は $x=1$，2，3 に限られる．

(i)　$x=1$ のとき

①より　$2y+z=17$　　$z=17-2y$

$2\leqq y<z$ となるときの y，z を求めると

$(y,\ z)=(2,\ 13)$，$(3,\ 11)$，$(4,\ 9)$，$(5,\ 7)$

(ii)　$x=2$ のとき

①より　$2y+z=14$　　$z=14-2y$

$3\leqq y<z$ となるときの y，z を求めると

$(y,\ z)=(3,\ 8)$，$(4,\ 6)$

(iii)　$x=3$ のとき

①より　$2y+z=11$　　$z=11-2y$

$4\leqq y<z$ となるときの y，z は存在しないので不適．

以上より，①を満たす自然数 x，y，z の組は，全部で **6** 組．

[2]　$n^2-40n+279=n^2-40n+9\times 31=(n-\mathbf{9})(n-\mathbf{31})$

$n-9$，$n-31$ は整数で，$n-9>n-31$ だから，$(n-9)(n-31)$ が正の素数になるのは，次のいずれかを満たす必要がある．

(i)　$n-9$，$n-31$ が正の整数で，$n-31=1$ である．

(ii)　$n-9$，$n-31$ が負の整数で，$n-9=-1$ である．

(i)のとき，$n=32$ であり $(n-9)(n-31)=23$

(ii)のとき，$n=8$ であり $(n-9)(n-31)=23$

ともに正の素数になるので適する．

よって，求める n の値は　$n=\mathbf{8}$，$\mathbf{32}$

第 41 講　総合問題(1)

a を実数とする．2 次方程式 $3x^2-ax+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲は $a<$ アイ $\sqrt{ウ}$，エ $\sqrt{オ}<a$ である．このとき，2 つの実数解がいずれも $\frac{1}{2}<x$ の範囲にあるような a の値の範囲は カ $\sqrt{キ}<a<\frac{ク}{ケ}$ である．また，2 つの実数解のうちの 1 つだけが $\frac{1}{2}<x<1$ の範囲にあるような a の値の範囲は $\frac{コ}{サ}<a<$ シ である。

解答例

2 次方程式 $3x^2-ax+1=0$ の判別式を D とすると，異なる 2 つの実数解をもつための条件は

$$D=a^2-12>0$$

よって　$a<\mathbf{-2\sqrt{3}}$，$\mathbf{2\sqrt{3}}<a$　……①

次に，$f(x)=3x^2-ax+1$ とおくと

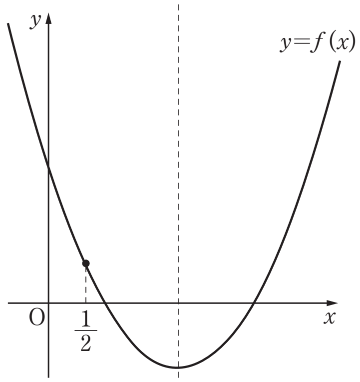
$$f(x)=3\left(x-\frac{a}{6}\right)^2-\frac{a^2}{12}+1$$

①のとき，2 つの実数解がともに $\frac{1}{2}<x$ の範囲にあるための条件は

軸 $x=\frac{a}{6}$ について，$\frac{a}{6}>\frac{1}{2}$ より　$a>3$　……②

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}-\frac{a}{2}>0$ より　$a<\frac{7}{2}$　……③

①～③の共通部分を求めると　$\mathbf{2\sqrt{3}<a<\frac{7}{2}}$



次に，2 つの実数解のうち 1 つだけが $\frac{1}{2}<x<1$ の範囲にあるための条件は

$f\left(\frac{1}{2}\right)$ と $f(1)$ が異符号であることなので

$$f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0 \qquad \left(\frac{7}{4}-\frac{a}{2}\right)(4-a)<0$$

$$(2a-7)(a-4)<0 \qquad \mathbf{\frac{7}{2}<a<4}$$

第42講　総合問題(2)

平行四辺形OABCにおいて，$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1$，かつ $\angle AOC=120^\circ$ であるとする．また，s，t を実数とし，2点P，Qをそれぞれ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OB}$ と定める．

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ である．

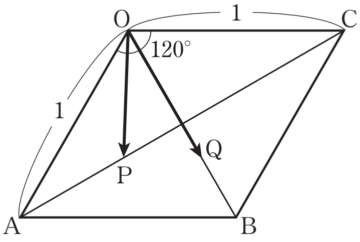
(2)　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}t$ である．

(3)　内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}$ が0のとき，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\boxed{カ}s^2-\boxed{キ}s+\boxed{ク}$ である．

(4)　(3)の条件のもとで，さらに点Qが線分OB上にあるような s の値の範囲は

$$\frac{\boxed{ケ}-\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}\leqq s\leqq\frac{\boxed{シ}+\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$$ である．

解答例



(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1^2\cos120^\circ=\boldsymbol{\dfrac{-1}{2}}$

(2)　$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ より　$\overrightarrow{OQ}=t\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left\{s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OC}\right\}\cdot t\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$$
$$=t\left\{s\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+(s+1-s)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-s)\left|\overrightarrow{OC}\right|^2\right\}$$
$$=t\left(s-\frac{1}{2}+1-s\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}t$$

(3)　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ より　$\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\right)=0$　　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|^2$

ここで　$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left|s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OC}\right|^2$

$$=s^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+2s(1-s)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-s)^2\left|\overrightarrow{OC}\right|^2$$
$$=s^2-s(1-s)+(1-s)^2=3s^2-3s+1$$

よって　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{3}s^2-\boldsymbol{3}s+\boldsymbol{1}$

(4)　(2)，(3)より　$\dfrac{1}{2}t=3s^2-3s+1$　　$t=6s^2-6s+2$

Qが線分OB上にあるための条件は $0\leqq t\leqq1$ だから　$0\leqq 6s^2-6s+2\leqq1$

$6s^2-6s+2=6\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$ だから，求める条件は

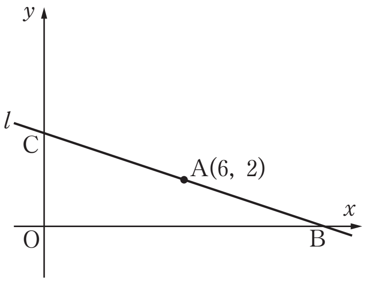
$6s^2-6s+2\leqq1$ より　$6s^2-6s+1\leqq0$

これを解いて　$\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}}\leqq s\leqq\boldsymbol{\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}}$

第 43 講　総合問題(3)

平面上の点 A(6, 2) を通る傾き $-k$ の直線 l を考える．ただし，$k>0$ とする．直線 l が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ B，C とし，原点を O とするとき，△OBC の面積の最小値は **アイ** であり，そのときの k の値は $\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である．

解答例



点 A(6, 2) を通る傾き $-k$ の直線 l の方程式は

$$y-2=-k(x-6)$$

$$y=-kx+6k+2$$

$x=0$ のとき　$y=6k+2$

$y=0$ のとき　$x=6+\dfrac{2}{k}$

よって，$\mathrm{OB}=6+\dfrac{2}{k}$，$\mathrm{OC}=6k+2$ であるから，

△OBC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\left(6+\frac{2}{k}\right)(6k+2)=18k+\frac{2}{k}+12$$

$18k>0$，$\dfrac{2}{k}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均) の関係から

$$18k+\frac{2}{k}\geqq 2\sqrt{18k\cdot\frac{2}{k}}=12$$

よって　$S\geqq 12+12=24$

等号成立は，$18k=\dfrac{2}{k}$，つまり　$k=\dfrac{1}{3}$ のとき．

したがって，S の最小値は **24**

このとき　$k=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

第44講　総合問題(4)

△ABC において，AB＝4，BC＝7，CA＝$\sqrt{23}$ とし，点 A から辺 BC へ下ろした垂線と BC の交点を D とする．

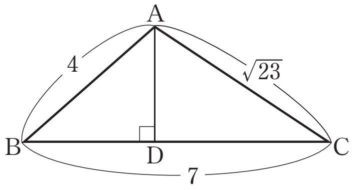
(1)　$\cos\angle ABC = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$AD = \sqrt{\boxed{ウ}}$ である．

(2)　点 C から直線 AB へ下ろした垂線と直線 AB との交点を E とすると，点 E は辺 AB の A 側の延長上にあり，$BE = \dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$，$\cos\angle DAE = \dfrac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である．

(3)　直線 AD と直線 CE の交点を F とするとき，△ABF の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サシス}}}{\boxed{セ}}$ である．

解答例

(1)　∠ABC＝θ とする．△ABC において余弦定理より

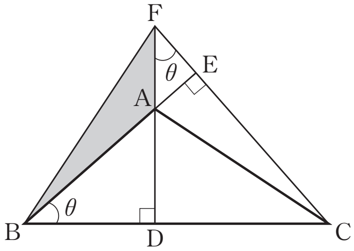


$$\cos\theta = \frac{4^2+7^2-\left(\sqrt{23}\right)^2}{2\cdot4\cdot7} = \frac{42}{56} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

また　$\sin\theta = \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

△ABD において　$AD = AB\sin\theta = 4\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4} = \mathbf{\sqrt{7}}$

(2)　△BCE において　$BE = BC\cos\theta = 7\cdot\dfrac{3}{4} = \mathbf{\dfrac{21}{4}}$



また　$\cos\angle DAE = \cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta = \mathbf{\dfrac{-\sqrt{7}}{4}}$

(3)　$AE = BE - AB = \dfrac{21}{4} - 4 = \dfrac{5}{4}$

∠AFE＝∠ABD＝θ だから，△AEF において，

$AE = AF\sin\theta$ より　$AF = \dfrac{AE}{\sin\theta} = \dfrac{5}{4} \div \dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

よって　$DF = AD + AF = \sqrt{7} + \dfrac{5\sqrt{7}}{7} = \dfrac{12\sqrt{7}}{7}$　　また　$BD = AB\cos\theta = 4\cdot\dfrac{3}{4} = 3$

△BDF において　$BF = \sqrt{3^2+\left(\dfrac{12\sqrt{7}}{7}\right)^2} = 3\sqrt{1+\dfrac{16\cdot7}{49}} = \dfrac{3\sqrt{161}}{7}$

△ABF の外接円の半径を R とすると，正弦定理より　$\dfrac{BF}{\sin\angle BAF} = 2R$

$\sin\angle BAF = \sin(90^\circ+\theta) = \cos\theta = \dfrac{3}{4}$ だから

$$R = \frac{BF}{2\sin\angle BAF} = \frac{3\sqrt{161}}{7} \div \left(2\cdot\frac{3}{4}\right) = \mathbf{\frac{2\sqrt{161}}{7}}$$

第45講　総合問題(5)

n を自然数，i を虚数単位とする．0 と書かれたカードが1枚，1，-1，i，$-i$ と書かれたカードがそれぞれ n 枚，合計 $4n+1$ 枚ある．これらのカードをよくまぜて，左から右に一列に並べる．左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき，

(1)　積 $X_1X_2X_3$ が 0 となる確率は，$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}n+\boxed{ウ}}$ である．

(2)　積 $X_1X_2X_3$ が実数となる確率は，$\dfrac{\boxed{エ}(n+1)}{\boxed{オ}n+\boxed{カ}}$ である．

(3)　和 X_1+X_2 が実数となる確率は，$\dfrac{\boxed{キ}n+\boxed{ク}}{2(\boxed{ケ}n+\boxed{コ})}$ である．

解答例

$4n+1$ 枚のカードの並べ方は　$(4n+1)!$ 通り．

(1)　$X_1X_2X_3=0$ となるのは，X_1，X_2，X_3 のいずれかが 0 であるときである．

0 のカードの並べ方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り．残り $4n$ 枚のカードの並べ方は $(4n)!$ 通りあるから，

求める確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot(4n)!}{(4n+1)!}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4n+1}}$

(2)　積 $X_1X_2X_3$ が実数となる場合を，次の(ｉ)～(iii)に分けて考える．

(ｉ)　$X_1X_2X_3=0$ となるとき．(1)より，確率は　$\dfrac{3}{4n+1}$

(ii)　X_1，X_2，X_3 がすべて 0 以外の実数となるとき．

X_1，X_2，X_3 が 1 または -1 となるときであるから，確率は

$$\frac{{}_{2n}\mathrm{P}_3\cdot(4n-2)!}{(4n+1)!}=\frac{(2n-1)(n-1)}{(4n+1)(4n-1)}$$

(iii)　X_1，X_2，X_3 のうち 2 つが虚数，1 つが 0 以外の実数となるとき．

虚数のカード 2 枚と，1 または -1 のカード 1 枚の選び方が ${}_{2n}\mathrm{C}_2\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_1$ 通りあるから，確率は　$\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_2\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_1\cdot3!(4n-2)!}{(4n+1)!}=\dfrac{3n(2n-1)}{(4n+1)(4n-1)}$

(ｉ)～(iii)より，求める確率は

$$\frac{3}{4n+1}+\frac{(2n-1)(n-1)}{(4n+1)(4n-1)}+\frac{3n(2n-1)}{(4n+1)(4n-1)}=\boldsymbol{\frac{2(n+1)}{4n+1}}$$

(3)　和 X_1+X_2 が実数となるのは，次の(ｉ)または(ii)の場合である．

(ｉ)　X_1，X_2 がともに実数となるとき．実数のカードは $2n+1$ 枚あるから，

確率は　$\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{P}_2\cdot(4n-1)!}{(4n+1)!}=\dfrac{2n+1}{2(4n+1)}$

(ii)　X_1，X_2 が共役な虚数となるとき．一方が i で他方が $-i$ であるから，

確率は　$\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_1\cdot(4n-1)!}{(4n+1)!}=\dfrac{n}{2(4n+1)}$

(ｉ)，(ii)より，求める確率は　$\dfrac{2n+1}{2(4n+1)}+\dfrac{n}{2(4n+1)}=\boldsymbol{\dfrac{3n+1}{2(4n+1)}}$

第 46 講　総合問題(6)

(1)　$\frac{5}{6} < \log_{10}7 < \frac{6}{7}$ であることを用いると，7^{42} は [アイ] 桁の整数であることがわかる.

(2)　$\log_{10}15$ に最も近い値は [ウ] であり，$\log_{10}19$ に最も近い値は，$18 < 19 < 20$ であることを利用すると [エ] である.

ただし，近似値として，$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ を用いてよい.

[ウ]，[エ] は，次の①～⑥のうちからあてはまるものを選べ.

①　1.13　　②　1.18　　③　1.23　　④　1.28　　⑤　1.33　　⑥　1.38

解答例

(1)　$\log_{10}7^{42} = 42\log_{10}7$

$\frac{5}{6} < \log_{10}7 < \frac{6}{7}$ だから　$42 \times \frac{5}{6} < 42\log_{10}7 < 42 \times \frac{6}{7}$

$35 < \log_{10}7^{42} < 36$

すなわち　$10^{35} < 7^{42} < 10^{36}$

よって，7^{42} は **36** 桁の整数である.

(2)　$\log_{10}15 = \log_{10}\frac{30}{2} = 1 + \log_{10}3 - \log_{10}2$

$= 1 + 0.4771 - 0.3010 = 1.1761$

よって，$\log_{10}15$ に最も近い数は

1.18　(②)

次に，$18 < 19 < 20$ だから

$\log_{10}18 < \log_{10}19 < \log_{10}20$

$\log_{10}18 = \log_{10}2 + 2\log_{10}3$

$= 0.3010 + 2 \times 0.4771 = 1.2552$

$\log_{10}20 = 1 + \log_{10}2 = 1.3010$

したがって　$1.2552 < \log_{10}19 < 1.3010$

よって，$\log_{10}19$ に最も近い値は

1.28　(④)

第 47 講　総合問題(7)

さいころを投げる操作を繰り返し，5 以上の目が合計 3 回出たところで終了とする．
n を 3 以上の自然数とし，n 回目の操作で終了する確率を p_n とするとき

(1)　$p_n=\dfrac{(n-\boxed{ア})(n-\boxed{イ})\cdot\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

ただし，$\boxed{ア}<\boxed{イ}$ とし，$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ は次の①～⑧からあてはまるものを選べ．

①　2^{n-1}　②　2^{n-2}　③　2^{n-3}　④　2^{n-4}
⑤　3^{n-1}　⑥　3^{n}　⑦　3^{n+1}　⑧　3^{n+2}

(2)　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ を n の式で表すと，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\dfrac{\boxed{オ}n}{\boxed{カ}(n-\boxed{キ})}$ となる．

したがって，p_n を最大にする n は，$\boxed{ク}$ または $\boxed{ケ}$ である．

ただし，$\boxed{ク}<\boxed{ケ}$ とする．

解答例

(1)　1 つのさいころを 1 回投げるとき，5 以上の目が出る確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

n 回目の操作で終了するのは，$(n-1)$ 回目までに 5 以上の目が 2 回出て，n 回目に 5 以上の目が出るときだから，その確率 p_n は

$$p_n={}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{2^{n-3}}{3^n}=\frac{(n-\mathbf{1})(n-\mathbf{2})\cdot\mathbf{2}^{n-4}}{\mathbf{3}^n}\quad(④,\ ⑥)$$

(2)　$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{n(n-1)\cdot 2^{n-3}}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{(n-1)(n-2)\cdot 2^{n-4}}=\frac{\mathbf{2}n}{\mathbf{3}(n-\mathbf{2})}$$

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}>1$ のとき，$\dfrac{2n}{3(n-2)}>1$ から　$2n>3(n-2)$

したがって　$n<6$

これより
$$\begin{cases}3\leqq n\leqq 5 \text{ のとき} & p_n<p_{n+1}\\ n=6 \text{ のとき} & p_n=p_{n+1}\\ n\geqq 7 \text{ のとき} & p_n>p_{n+1}\end{cases}$$

すなわち　$p_3<p_4<p_5<p_6$，$p_6=p_7$，$p_7>p_8>\cdots\cdots$

よって，p_n を最大にする n は　$n=\mathbf{6},\ \mathbf{7}$

第48講　総合問題(8)

一般項が $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある.

(1)　$a_1=$ **ア** ，$a_2=$ **イ** である.

(2)　$a_{n+2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right\}$

$$=\frac{\boxed{ウ}}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}+\frac{\boxed{エ}}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}$$

と表されるので，a_n，a_{n+1}，a_{n+2} の間に成り立つ関係式は **オ** である.

オ は，次の①～④からあてはまるものを選べ.

① $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$　　② $a_{n+2}=a_n+2a_{n+1}$

③ $a_{n+2}=2a_n+a_{n+1}$　　④ $a_{n+2}=5a_n+a_{n+1}$

この結果，$a_5=$ **カ** ，$a_{10}=$ **キク** である.

解答例

(1)　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$\alpha+\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1,\ \alpha\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$\alpha-\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

$a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$ であるから　$a_1=\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\mathbf{1}$

また　$a_2=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}=\dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\sqrt{5}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\mathbf{1}$

(2)　$a_{n+2}=\dfrac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^n-\beta^n)\}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})\cdot1-(-1)\cdot(\alpha^n-\beta^n)\}$$

$$=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}+\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}$$

$$=a_{n+1}+a_n$$

よって　$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$　(**①**)

この漸化式を利用すると　$a_3=a_1+a_2=1+1=2$，$a_4=a_2+a_3=1+2=3$

以下同様に　$a_5=2+3=\mathbf{5}$，$a_6=3+5=8$，$a_7=5+8=13$，$a_8=8+13=21$，

$a_9=13+21=34$，$a_{10}=21+34=\mathbf{55}$